5.3.21+

Digitized by Google

RECHERCHES

SUR LA PRÉCESSION

DES EQUINOXES,

ET SUR LA NUTATION

DE L'AXE DE LA TERRE,

DANS LE SYSTÊME NEWTONIEN.

Par M. D'ALEMBERT, *des Académies Royales des Sciences de Paris & de Berlin, & de la Société Royale de Londres.*

A PARIS,

Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

A MONSIEUR

LE MARQUIS LOMELLINI,

ci-devant Envoyé Extraordinaire de la République de Genes à la Cour de France.

MONSIEUR,

Les plus grands génies de l'Antiquité mettoient le nom de leurs amis à la tête de leurs Ouvrages, parce

qu'un ami leur étoit plus cher qu'un protecteur. Un ſentiment ſi noble & ſi digne de vous, eſt tout ce que je puis imiter d'eux. Ce n'eſt point à votre naiſſance que je rends hommage, ce ſeroit mettre vos Ancêtres à votre place, & oublier que j'écris à un Philoſophe. L'accueil que vous faites aux gens de Lettres ne leur laiſſe point appercevoir la ſupériorité de votre rang, parce que vous n'avez point à leur envier la ſupériorité des lumieres. Auſſi, non content de rechercher leur commerce, vous leur témoignez encore cette conſidération réelle ſur laquelle ils ne ſe méprennent pas quand ils en ſont dignes; & comme la vanité n'a point de part à votre eſtime pour eux, la réputation ne vous en impoſe point dans vos jugemens. Je vous préſente donc ces recherches, MONSIEUR, comme à un Geométre profond, qui a ſçû joindre aux agrémens de l'eſprit les plus ſublimes connoiſſances, & dont

je diſtingue le ſuffrage parmi le petit nombre de ceux qui peuvent véritablement me flatter. J'eſpere que ce fruit de mon travail occupera quelques momens de votre loiſir, entretiendra l'amitié que vous avez pour moi, & vous rappellera quelquefois le ſouvenir du reſpectueux attachement avec lequel je ſuis,

MONSIEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant
Serviteur, D'ALEMBERT.

A Paris, ce 15 Juin
1749.

Digitized by Google

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 14 Juin 1749.

MEſſieurs CLAIRAUT & DE MONTIGNY, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. D'ALEMBERT, intitulé : *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes & ſur la nutation de l'Axe de la Terre dans le ſyſtême Newtonien*, en ayant fait leur rapport ; l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, ce 14 Juin 1749.

GRAND-JEAN DE FOUCHY, *Sécretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

INTRODUCTION.

L'ESPRIT de ſyſtême eſt dans la Phyſique, ce que la Métaphyſique eſt dans la Geométrie : s'il eſt quelquefois néceſſaire pour nous mettre dans le chemin de la vérité, il eſt preſque toujours incapable de nous y conduire par lui-même. Eclairé par l'obſervation de la nature, il peut entrevoir les cauſes des Phenomenes : mais c'eſt au calcul à aſſurer, pour ainſi dire, l'exiſtence de ces cauſes, en déterminant exactement les effets qu'elles peuvent produire, & en comparant ces effets avec ceux que l'expérience découvre. Toute hypotheſe dénuée d'un tel ſecours, acquiert rarement ce degré de certitude qu'on doit toujours ſe propoſer dans les Sciences naturelles, & qui néanmoins ſe trouve ſi peu dans ces conjectures frivoles, qu'on honore du nom de ſyſtêmes. S'il ne pouvoit y en avoir que

de cette eſpéce, le principal mérite du Phyſicien ſeroit, à proprement parler, d'avoir l'eſprit de ſyſtême & de n'en faire jamais.

De-là il s'enſuit, que parmi les différentes ſuppoſitions que nous pouvons imaginer pour expliquer un effet, celles qui par leur nature nous fourniſſent des moyens infaillibles de nous aſſurer ſi elles ſont vraies, ſont les ſeules dignes de notre examen. Le ſyſtême de l'Attraction eſt de ce nombre, & mérite, au moins à cet égard, l'attention des Philoſophes. En effet, ſi les Corps céleſtes ſe meuvent dans un eſpace non réſiſtant, en s'attirant les uns les autres avec une force réciproquement proportionnelle au quarré de leur diſtance, la recherche de leur mouvement eſt un Problême de Méchanique, pour lequel nous avons toutes les données néceſſaires. La ſolution de ce Problême indiquera les Phenomenes tels qu'ils doivent être dans le ſyſtême de l'Attraction: il n'y aura plus qu'à les comparer avec les Phenomenes réels, pour juger de l'autorité que ce ſyſtême doit avoir dans l'Aſtronomie Phyſique.

Quoique l'examen de cette importante queſtion renferme de grandes difficultés de calcul, peut-être touchons-nous au moment de ſa déciſion:

ſion : la perfection à laquelle l'Analyſe s'éleve de jour en jour, nous donne lieu de l'eſperer. Ce ſera du moins contribuer à l'avancement des Sciences, que de remplir quelque partie d'un ſi grand objet. Animé par ce motif, j'ai entrepris de diſcuter dans cet Ouvrage les moyens que l'Attraction peut fournir d'expliquer un des principaux Phenomenes céleſtes.

Pour peu qu'on ait de connoiſſances dans l'Aſtronomie, on ſçait que la Sphere des Etoiles paroît ſe mouvoir d'Occident en Orient autour des Pôles de l'Ecliptique d'un mouvement très-lent, qui, ſuivant les obſervations des Aſtronomes, eſt d'environ 50 ſecondes chaque année. Cette apparence vient d'un mouvement réel de l'Axe de la terre autour des Pôles de l'Ecliptique, en conſéquence duquel les points Equinoctiaux, c'eſt-à-dire, les points où l'Ecliptique & l'Equateur ſe coupent, changent continuellement de place, & rétrogradent chaque année d'Orient en Occident d'environ 50 ſecondes. La rétrogradation de ces points, a été nommée *Préceſſion des Equinoxes* (*a*). Mais quelle eſt la cauſe d'un mou-

(*a*) Le mot de *Préceſſion des Equinoxes* peut venir, ou de ce que le mouvement des points Equinoctiaux ſe fait, pour

vement ſi ſingulier dans l'Axe de la terre ? l'Attraction peut-elle en rendre raiſon ? C'eſt ce que je me ſuis propoſé d'examiner.

Newton, qui n'a preſque rien haſardé, & que par cette raiſon nos Syſtematiques n'ont pas mis au rang des Philoſophes, paroît n'avoir pas porté dans l'explication de ce Phenomene la lumiere qu'il a répandue ſur tant d'autres. Il trouve, à la vérité, par une méthode dont on ne ſçauroit trop admirer la fineſſe, que la préceſſion annuelle des Equinoxes doit être de 50 ſecondes, telle qu'elle eſt en effet. Mais ſi on ne ſçauroit deſirer une plus grande exactitude dans l'accord de ſes calculs avec les obſervations, il me ſemble qu'il n'en eſt pas de même des principes ſur leſquels ſon Analyſe eſt appuyée. Pour développer les raiſons qui m'obligent à penſer ainſi, il eſt néceſſaire de donner une idée de l'ingénieuſe Théorie de M. *Newton*, autant que les bornes & la

---

parler le langage des Aſtronomes, vers les Signes qui *précedent*, c'eſt-à-dire, contre l'ordre naturel des Signes; ou de ce que par la rétrogradation de ces points le moment où l'Equinoxe arrive chaque année, *précede* celui où la Terre revient au point de ſon orbite où l'Equinoxe étoit arrivé l'année d'auparavant.

nature de cette Introduction pourront me le permettre.

Imaginons que la Terre ſoit une maſſe Sphérique, diviſée en deux Hémiſpheres par un plan perpendiculaire à l'Ecliptique, qui joigne les centres de la Terre & du Soleil, & que le Soleil ſeul agiſſe ſur cette maſſe en attirant les parties qui la compoſent ; il eſt certain que l'action de cet Aſtre ſur les deux Hémiſpheres ſera parfaitement ſemblable, en quelque point que la Terre ſe trouve ſur l'orbite qu'elle décrit. Ainſi dans cette hypotheſe, l'Axe de la terre conſerveroit toujours une ſituation conſtante, c'eſt-à-dire, demeureroit toujours parallele à lui-même durant la révolution de la Terre autour du Soleil. Mais on ſçait par les obſervations, que la Terre eſt un Sphéroide applati, & la Théorie de la gravitation concourt même avec les meſures actuelles à lui donner cette figure. Ainſi pour changer notre Globe en un Sphéroide de cette forme, ſuppoſons qu'il ſoit recouvert d'une eſpéce d'enveloppe ſolide dont l'épaiſſeur aille en augmentant depuis les Pôles juſqu'à l'Equateur ; il eſt évident, que tandis que la Terre parcourt ſon orbite, un plan perpendiculaire à l'Eclipti-

que qui joindroit les centres de la Terre & du Soleil, diviſeroit notre Sphéroide en deux portions, qui ſeroient à la vérité ſemblables & égales, mais qui ne ſeroient point placées de la même maniére par rapport à ce plan, excepté lorſque l'Axe de la terre ſe trouveroit dans le plan même ; d'où il eſt aiſé de voir, que dans le cas du Sphéroide, l'action du Soleil ſera différente ſur les deux moitiés de la Terre, & déja l'on doit entrevoir que cette inégalité produira dans l'Axe terreſtre un mouvement de rotation, comme il arrive à une verge dont les deux parties ſont pouſſées avec des forces différentes ou différemment appliquées.

Pour déterminer le mouvement de rotation dont nous venons de parler, M. *Newton* ſuppoſe que la maſſe de toute l'enveloppe extérieure du Globe ſoit, pour ainſi dire, reſſerrée & réduite à un ſeul anneau très-mince & très-denſe, placé dans le plan de l'Equateur, & qui environne la Terre à peu près comme on voit l'horiſon dans nos Globes terreſtres. Enſuite faiſant abſtraction du Globe, il imagine que les particules dont l'anneau eſt compoſé, ſoient une infinité de petites Lunes adhérentes entr'elles, &

qui entraînées par le mouvement diurne des points de l'Equateur, tournent en un jour autour du centre de la Terre à la diſtance de ſon demi-diamétre. M. *Newton* trouve par la Théorie de l'Attraction que les *nœuds* de ces petites Lunes, c'eſt-à-dire les points d'interſection de leur orbite, ou, ce qui revient au même, de l'anneau, avec le plan de l'Ecliptique, devroient rétrograder chaque année d'Orient en Occident d'environ 45 minutes. Voilà quel ſeroit, ſelon ce grand Geométre, le mouvement des points Equinoctiaux, ſi l'enveloppe dont nous avons parlé étoit réduite à un anneau ſolide placé dans le plan de l'Equateur, & que le Globe fut ſuppoſé anéanti. Et ce mouvement, qui eſt déja ſi conſidérable par rapport à la préceſſion réelle des Equinoxes, auroit été trouvé beaucoup plus grand, ſi on avoit eu égard à l'action de la Lune. Mais pluſieurs circonſtances concourent à le diminuer conſidérablement, & M. *Newton* paroît les combiner avec tant d'adreſſe, qu'il réduit la préceſſion à n'être préciſément que de 50 ſecondes, tel que le donnent les obſervations. Voici en général les principes qu'il emploie pour arriver à un réſultat ſi frappant.

Digitized by Google

Le mouvement de 45 minutes que l'anneau devroit avoir s'il étoit ſeul, doit ſe partager entre lui & tout le Globe auquel il eſt adhérent, & comme la maſſe du Globe eſt beaucoup plus grande que celle de l'anneau, la diſtribution du mouvement doit ſe faire de maniére, que la viteſſe annuelle de 45 minutes en ſoit très-diminuée. En effet, on conçoit aiſément que ſi un Corps à qui l'on a imprimé une viteſſe quelconque, eſt obligé de la partager avec un autre Corps de maſſe beaucoup plus grande, la viteſſe commune & reſtante aux deux Corps, ne ſera qu'une très-petite partie de la viteſſe primitive.

Une ſeconde circonſtance contribue à diminuer encore le mouvement de l'anneau ; c'eſt que l'action du Soleil ſur l'enveloppe réelle qui environne le Globe, n'eſt que les deux cinquiémes de l'action de cet Aſtre ſur l'anneau, où nous avons ſuppoſé d'abord que toutes les particules de l'enveloppe étoient réunies. Enfin, l'inclinaiſon de l'Axe terreſtre au plan de l'Ecliptique doit modifier auſſi l'action du Soleil : car ſelon que cet Axe ſera différemment incliné, il fera à chaque point de l'Ecliptique un angle différent avec la ligne qui joint les centres de la

Terre & du Soleil ; par conſéquent la quantité & la loi de l'action du Soleil dépend de l'inclinaiſon de l'Axe, & c'eſt auſſi ce que l'Analyſe apprend.

Toutes ces remarques étant rapprochées & combinées par le calcul, M. *Newton* trouve que le mouvement annuel & rétrograde de la ſection de l'Equateur & de l'Ecliptique, cauſé par l'action ſeule du Soleil, doit être de 10 ſecondes par an. Or l'action ſeule de la Lune doit produire, ſelon lui, un mouvement quadruple de celui-là, c'eſt-à-dire de 40 ſecondes ; d'où il conclut, qu'en conſéquence des deux actions réunies, le mouvement des points Equinoctiaux doit être de 50 ſecondes.

Une conformité ſi exacte entre le calcul & le Phenomene, paroît ſans doute une des preuves les plus favorables au ſyſtême de l'Attraction. Mais les conſéquences qui en réſultent perdront de leur force, ſi quelques-unes des propoſitions qui ſervent de baſe à la Théorie de M. *Newton*, ſont, ou douteuſes, ou peu exactes. J'oſerois dire que j'ai tout lieu de le croire, ſi je ne ſavois avec quelle retenue, & pour ainſi dire, avec quelle ſuperſtition on doit juger les grands hommes.

Digitized by Google

Avant que d'entrer là-deſſus dans aucun détail, je crois devoir faire une obſervation qui ne ſera peut-être pas jugée inutile. M. *Newton* regarde l'anneau qui environne la Terre, comme compoſé de petites Lunes, & il prend pour hypotheſe que le mouvement des nœuds de cet anneau, ſeroit le même, ſoit que les Lunes fuſſent iſolées ou adhérentes les unes aux autres. Cette propoſition n'eſt pas, ce me ſemble, aſſez évidente pour être donnée comme une eſpéce d'axiome, & j'avoue que j'ai eu beſoin d'un calcul aſſez difficile pour en reconnoître la vérité. Il eſt certain que des Lunes iſolées n'auroient pas toujours leurs centres placés dans un même plan; car l'Attraction du Soleil ſur ces Lunes étant différente ſelon leur différente ſituation, le mouvement de leurs nœuds varieroit ſuivant la poſition où chaque Lune ſe trouveroit par rapport à ſon nœud; au lieu que le mouvement des nœuds de toutes les Lunes ſeroit parfaitement le même, ſi elles formoient un anneau ſolide. Ainſi la ſolidité de l'anneau doit néceſſairement influer ſur le mouvement des nœuds de chaque Lune priſe ſéparément: il eſt vrai qu'elle n'altére pas le mouvement moyen, qui eſt le ſeul dont M. *Newton* veut

veut parler. Mais quoique ſon hypotheſe ſoit vraie, n'étoit-on pas en droit d'en exiger une démonſtration ? Perſonne que je ſçache, ne l'avoit encore donnée, & je me flatte qu'on conviendra après avoir lû la mienne, que cet endroit de M. *Newton* avoit au moins beſoin d'être expliqué. Mais je n'inſiſte pas ſur une obſervation auſſi légere. Les remarques qui ſuivent me paroiſſent un peu plus importantes.

En premier lieu, ce grand Geométre ſuppoſe que la Terre eſt homogene, & que la différence des Axes eſt $\frac{1}{230}$; or cette hypotheſe n'eſt point conforme aux obſervations de la figure de la Terre, qui paroiſſent adoptées par les plus célébres Aſtronomes ; car ſuivant ces obſervations, la différence des Axes eſt d'environ $\frac{1}{178}$, &, ce qui en eſt une conſéquence néceſſaire, la Terre n'eſt pas un Sphéroide entiérement homogene. J'avoue que cette erreur, ſi c'en eſt une, ne pouvoit être connue de M. *Newton*, & ne ſçauroit par conſéquent lui être imputée ; car ce n'eſt que depuis très-peu d'années qu'on a pû determiner le vrai rapport des Axes de la terre. Mais je crois qu'on doit avouer auſſi, que le peu de certitude de l'hypotheſe rend la Théorie inſuffiſante. On

verra même dans un moment, que cette hypotheſe doit donner, ſuivant mon calcul, un réſultat fort différent de celui de M. *Newton*.

En ſecond lieu, il me ſemble qu'on peut former quelques doutes ſur le rapport établi par M. *Newton*, entre les forces que le Soleil & la Lune exercent ſur la terre. Les forces dont il s'agit ici, ne ſont autre choſe que la différence de l'Attraction de ces Aſtres ſur le centre de la terre, & ſur ſes parties extérieures. Elles ſont donc entiérement analogues à celles qui produiſent le flux & reflux de la Mer. Car le mouvement des eaux de l'Ocean, vient, comme je l'ai fait voir ailleurs (†), de ce que les différentes parties de la Terre ſont attirées vers le Soleil & vers la Lune avec une force plus ou moins grande que ſon centre. C'eſt auſſi par des obſervations choiſies de la hauteur des marées, que M. *Newton* détermine le rapport de la force du Soleil à celle de la Lune, & qu'il trouve que la ſeconde eſt environ quadruple de la premiere. Cette méthode, qui eſt la ſeule dont ce grand Philoſophe ait pû faire uſage, eſt très-ingénieu-

(†) *Réflexions ſur la cauſe des Vents.* Paris, 1747.

ſe, tant par elle-même, que par la maniére dont ſon illuſtre Auteur l'a employée. Mais on doit convenir, ce me ſemble, qu'elle a quelque choſe d'un peu vague. La profondeur & la figure des côtes, les vents & les courans, altérent tellement la hauteur des marées, qu'il n'y a peut-être pas deux endroits ſur la Terre, où elle ſoit exactement la même. Auſſi M. *Daniel Bernoulli* trouve-t'il par d'autres obſervations qu'il prétend mieux choiſies & plus exactes, que la force de la Lune eſt à celle du Soleil, comme 5 eſt à 2; ce qui réduiroit le mouvement annuel des points Equinoctiaux à moins de 35 ſecondes, en conſervant d'ailleurs toutes les autres hypotheſes de M. *Newton*. Il me ſemble que bien loin de déterminer la préceſſion des Equinoxes par un rapport ſi incertain des deux forces, il ſeroit bien plus ſûr de trouver ce rapport par le moyen de la quantité obſervée de la préceſſion, & des mouvemens connus de l'Axe de la terre. C'eſt ce que nous examinerons un peu plus bas.

Juſqu'ici, les objections que nous avons oſé faire à M. *Nweton*, ne tombent que ſur des hypotheſes incertaines, ou tout au plus ſur des erreurs de fait, qu'il n'étoit pas à portée de corri-

ger, ni même de connoître. Mais voici, ce me ſemble, une mépriſe plus réelle : c'eſt celle où il paroît tomber, en calculant le mouvement que l'action du Soleil doit produire dans l'Axe de la terre. Je ne crois pas que le mouvement de l'enveloppe extérieure du Globe, & celui de l'anneau auquel on a réduit cette enveloppe, doivent être entr'eux comme les forces qui les animent, ainſi que M. *Newton* ſemble le ſuppoſer ; il eſt néceſſaire pour déterminer le rapport de ces mouvemens, d'avoir égard à la figure des maſſes que les puiſſances ont à mouvoir. Car quoique les maſſes ſoient égales, elles ſont cependant formées de parties différemment diſpoſées, & on ne peut déterminer le mouvement de la maſſe totale, ſans connoître le mouvement iſolé, pour ainſi dire, de chacune de ces parties. Qu'une force quelconque agiſſe ſur un lévier dont toute la maſſe ſoit ramaſſée à une de ſes extrémités, il eſt facile de voir que le mouvement de cette maſſe ne ſera pas le même, que ſi elle étoit répandue ſur toute la longueur du lévier. La raiſon en eſt évidente, c'eſt que le bras de lévier par lequel chaque particule eſt pouſſée, ſe trouve différent dans les deux cas.

Enfin, M. *Newton* tombe encore, ſi je ne me trompe, dans une autre mépriſe, par la façon dont il partage entre le globe & l'anneau, le mouvement que l'anneau devroit avoir s'il étoit iſolé & non adhérent au globe. En corrigeant le principe dont il ſe ſert pour faire cette diſtribution, & dont il ſeroit difficile de donner ici l'idée, on voit que l'action ſeule du Soleil devroit produire un mouvement annuel de 12 ſecondes dans les points Equinoctiaux; deſorte qu'en admettant même toutes les autres hypotheſes dont nous croyons avoir montré l'inſuffiſance ou le peu de fondement, la préceſſion des Equinoxes devroit être, ſuivant la Théorie de M. *Newton*, d'environ 10 ſecondes plus grande que ne la donnent les obſervations : différence qui n'auroit pas échappé aux Aſtronomes.

Mais cette différence même quoiqu'aſſez ſenſible, eſt cependant bien plus petite que celle qu'on devroit trouver réellement, en faiſant entrer dans le calcul toutes les circonſtances néceſſaires. Car le mouvement de rotation de la terre autour de ſon Axe, auquel M. *Newton* ne paroît pas faire toute l'attention convenable, & qui ſe combine avec l'action du Soleil & de la Lune,

doit, toutes choſes d'ailleurs égales, influer pour beaucoup ſur la quantité de la préceſſion ; & je crois avoir démontré dans cet Ouvrage, que ſi l'on a égard à ce mouvement, & que l'on combine avec exactitude toutes les forces qui agiſſent ſur notre Globe, le mouvement des points Equinoctiaux ſe trouvera de 23 à 24 ſecondes, en faiſant abſtraction de l'action de la Lune, & en regardant la Terre comme un Sphéroide homogene ; réſultat qui ſeroit ſans doute très-contraire à l'Attraction, ſi le rapport des Axes de la terre & celui des deux forces étoient tels que M. *Newton* le ſuppoſe.

L'accord apparent des calculs de ce grand Geométre avec les obſervations, ne paroît donc pas auſſi favorable à l'Attraction, qu'on auroit pû le croire. Cependant il ſeroit injuſte d'attribuer à ce ſyſtême ſans autre examen, un défaut, qui, ſuppoſé qu'il ſoit réel, n'eſt peut-être que dans les principes & les ſuppoſitions dont l'Auteur s'eſt ſervi. D'ailleurs, eſt-il ſurprenant qu'un Philoſophe à qui nous devons un ſi grand nombre de découvertes, ait laiſſé quelques pas à faire dans la carrière immenſe où il a tant avancé ? & pouvons-nous nous glorifier, ſi inſtruits com-

me nous le ſommes par des obſervations dont il n'a pû avoir le ſecours, & aidés par une Analyſe que nous tenons de lui preſque toute entiére, nous nous trouvons en état d'ajouter quelque choſe à l'édifice qu'il a ſi prodigieuſement élevé? C'eſt d'après ces réflexions que j'ai cru pouvoir traiter le point d'Aſtronomie Phyſique dont il s'agit, comme un ſujet entiérement nouveau. J'ai tâché de trouver par une méthode rigoureuſe & directe, le mouvement que l'action réunie du Soleil & de la Lune doit produire dans l'Axe de la terre. Voici la méthode que j'ai ſuivi pour y parvenir.

Je détermine d'abord l'action par laquelle le Soleil tend à imprimer du mouvement à l'Axe terreſtre, & comme elle réſulte des différentes forces que cet Aſtre exerce ſur les parties de la terre, je réduis par un calcul exact toutes ces forces à une ſeule. Je fais la même choſe pour la Lune, en ayant égard à l'inclinaiſon & à la poſition de ſon orbite; & par cette méthode, je trouve à chaque inſtant la direction & la quantité abſolue des deux forces qui tendent à faire tourner l'Axe de la terre. Ces forces étant connues, il reſte encore à déterminer leur effet, & c'eſt

la partie de notre Problême la plus délicate & la plus compliquée.

J'ai démontré dans mon *Traité de Dynamique*, que pour trouver à chaque inſtant le mouvement d'un corps animé par un nombre quelconque de forces, il faut regarder le mouvement qu'il avoit dans l'inſtant précedent, comme compoſé d'un mouvement qui eſt détruit par ces forces, & d'un autre mouvement qu'il doit prendre réellement, & qui doit être tel, que les parties du corps puiſſent le ſuivre ſans ſe nuire les unes aux autres. Ce principe ſuppoſé, je commence par chercher de la maniére la plus générale le mouvement de la Terre, en imaginant qu'elle tourne autour de ſon Axe avec une viteſſe quelconque, uniforme ou non, & que l'Axe reçoive en même-tems un mouvement quelconque de rotation autour du centre. Dans cette hypotheſe, le mouvement de chaque particule durant un inſtant quelconque, peut être ſuppoſé formé de trois autres mouvemens, dont deux ſont paralleles au plan de l'Ecliptique, & dont le troiſiéme lui eſt perpendiculaire : chacun de ces mouvemens ſe change l'inſtant ſuivant en un autre, & peut être regardé comme compoſé de cet autre mouvement, & d'un

d'un ſecond qui eſt détruit par l'action du Soleil & de la Lune, action que nous venons de réduire à deux forces, dont la quantité & la direction ſont connues. Il n'eſt donc plus queſtion que de chercher les loix d'équilibre entre ces forces & celles qu'on doit ſuppoſer être détruites dans chaque particule. Ce qui m'oblige à donner la ſolution générale d'un Problême de Statique, où je détermine par un aſſez grand nombre de propoſitions les loix de l'équilibre entre des puiſſances qui n'agiſſent pas dans le même plan, ni ſuivant des lignes paralleles.

Les différentes équations que fournit la ſolution de ce Problême, étant appliquées au cas particulier dont il s'agit, ſe transforment en deux formules qui renferment la loi du mouvement de l'Axe de la terre. Ces formules ſont au nombre de deux, parce que la poſition de l'Axe de la terre à chaque inſtant dépend de deux variables; ſçavoir du chemin qu'il fait circulairement autour des Pôles de l'Ecliptique, & de ſon inclinaiſon ſur le plan de ce grand cercle. Car la variation de cette inclinaiſon eſt une circonſtance à laquelle il eſt néceſſaire d'avoir égard. On eſt d'autant moins en droit de la négliger, qu'on

auroit de la peine à voir ſans le ſecours d'un calcul aſſez ſubtil, pourquoi cette variation eſt ſi peu conſidérable, tandis que le mouvement circulaire de l'Axe de la terre autour des Pôles de l'Ecliptique eſt au contraire très-ſenſible. Selon M. *le Chevalier de Louville*, l'obliquité de l'Ecliptique ou l'angle qu'elle fait avec l'Equateur, ne doit diminuer que d'environ une minute en cent ans; & cette diminution, quoique fort petite, n'eſt pas même bien conſtatée, parce qu'elle eſt fondée ſur des obſervations anciennes dont on peut révoquer en doute l'exactitude.

Il n'en eſt pas de même de celles que l'illuſtre M. *Bradley* vient de publier, & par leſquelles il trouve que l'Axe de la terre eſt ſujet à une *nutation* ſenſible, c'eſt-à-dire à une eſpéce de balancement ou de vibration, dont le centre de la terre eſt le point fixe, & par lequel cet Axe s'incline, tantôt plus, tantôt moins, ſur le plan de l'Ecliptique. L'étendue ou la quantité totale de cette nutation eſt de 18 ſecondes, ſuivant les obſervations de M. *Bradley*: & ſa période répond exactement à celle des nœuds de la Lune, c'eſt-à-dire des points d'interſection de l'orbite Lunaire avec l'Ecliptique. Ces points qui ſe meu-

vent, comme l'on ſçait, d'un mouvement rétrograde, achevent leur révolution à peu près en dix-neuf ans. Or M. *Bradley* a obſervé, que durant ce tems l'extrémité de l'Axe de la terre s'éloigne du plan de l'Ecliptique d'environ 18 ſecondes, & s'en rapproche enſuite de la même quantité pour revenir à ſa premiere place.

Si on réſout par approximation les deux formules dont j'ai parlé plus haut, & auxquelles j'ai réduit la ſolution du Problême, on trouve que la nutation obſervée par M. *Bradley*, eſt en effet le plus ſenſible de tous les mouvemens auxquels l'Axe de la terre peut être ſujet pour s'approcher ou pour s'éloigner de l'Ecliptique, & qu'elle doit ſuivre exactement la loi que ce célébre Aſtronome a déterminée par ſes obſervations. On voit de plus, par les mêmes formules, que les points Equinoctiaux doivent en effet rétrograder fort lentement, & que leur mouvement, quoiqu'à peu près uniforme, eſt ſujet à une petite irrégularité qui dépend de la nutation de l'Axe, & qui eſt auſſi confirmée par les obſervations. Si ces réſultats ſont auſſi favorables à l'Attraction qu'on peut le deſirer, l'Analyſe délicate & pénible qu'il faut employer pour y parvenir, me

donne lieu de penſer qu'il n'y avoit que ce ſeul moyen de procurer aux partiſans de M. *Newton* un nouvel avantage, & je crois être le premier à qui ils le doivent. La nutation de l'Axe terreſtre confirmée par les obſervations & par la Théorie, fournit, ce me ſemble, la démonſtration la plus complette de la gravitation de la Terre vers la Lune, & par conſéquent de la tendance des Planetes principales vers leurs Satellites. Juſqu'ici cette tendance n'avoit paru ſe manifeſter que dans le flux & reflux de la Mer, Phenomene peut-être trop compliqué & trop peu ſuſceptible d'un calcul rigoureux, pour pouvoir réduire au ſilence les adverſaires de la gravitation réciproque. La nutation eſt un effet plus ſimple, auquel je ne vois pas ce qu'ils auront à répondre. Ainſi les réflexions que j'ai crû pouvoir faire ſur la Théorie de M. *Newton*, étant rapprochées des nouvelles preuves que mon Ouvrage va fournir à l'Attraction, ne ſerviront qu'à montrer, combien cet ingénieux ſyſtême eſt juſqu'ici à l'abri de toute atteinte, & combien l'idée ſeule en étoit heureuſe.

M. *Bradley* dit avoir vû une Table calculée par M. *Machin* d'après la Théorie, pour déter-

miner la nutation de l'Axe de la terre. Mais il me ſemble que M. *Machin* n'a encore rien publié de ſon travail. D'ailleurs, l'idée légere que l'on pourroit s'en former ſur quelques mots qu'en dit M. *Bradley*, feroit juger que ſa Méthode a quelque choſe de vague, ſi on ne devoit pas préſumer que ce grand Geométre a traité un Problême ſi important avec toute l'exactitude & la préciſion néceſſaires. Je ſuis cependant ſurpris, que ſuivant la Théorie de M. *Machin* adoptée par M. *Bradley*, le Pôle vrai de la terre doive décrire autour du Pôle moyen un cercle, ou tout au plus une Ellipſe très-peu allongée ; car ſuivant mes formules, les Axes de cette Ellipſe doivent être entr'eux environ comme 3 à 4. Cette différence entre nos deux Théories, me porte à croire, que l'équation ou l'inégalité de la préceſſion des Équinoxes n'eſt peut-être pas exactement telle, que M. *Bradley* l'a trouvé d'après M. *Machin*, & d'après ſes propres obſervations. Comme l'erreur, s'il y en a, eſt fort petite, & difficile à obſerver, j'exhorte les Aſtronomes à s'y rendre attentifs ; & pour leur faciliter ce travail, j'ai donné dans un article particulier des formules très-ſimples, pour calculer d'après mes principes la nu-

tation de l'Axe de la terre, l'équation de la préceſſion, & les variations qui en réſultent dans la poſition des Etoiles.

Pour rendre ma ſolution auſſi générale qu'elle pouvoit l'être, j'ai regardé la Terre comme un Sphéroide compoſé de couches ſolides, dont les denſités varient ſuivant une loi quelconque, & dont la figure ſoit auſſi telle qu'on voudra, Elliptique ou non, mais cependant à peu près Sphérique. Il eſt d'autant plus néceſſaire de ne ſe borner à aucune hypotheſe particuliere ſur ce ſujet, que les obſervations ne nous ont encore rien appris ſur la figure ni ſur la denſité des couches intérieures de notre Globe, quoiqu'elles nous ayent fait connoître à peu près ſa figure extérieure. Mais il ſemble d'un autre côté, que la généralité de notre ſuppoſition doive rendre la ſolution du Problême tout-à-fait indéterminée. Car le mouvement que l'action du Soleil & celle de la Lune impriment à l'Axe de la terre, dépend beaucoup de la figure & de l'arrangement des couches intérieures. Or dans l'ignorance où nous ſommes ſur cet arrangement & ſur le rapport de la force du Soleil à celle de la Lune, comment pourrons-nous aſſurer que la préceſſion

des Equinoxes doit être en effet de 50 ſecondes? Heureuſement la découverte de M. *Bradley* ſur la nutation, nous met en état de réſoudre une partie de ces difficultés. Car quoique nous ignorions la conſtitution intérieure de notre Globe, la Théorie d'accord avec les obſervations, nous apprend que la préceſſion annuelle vient de l'action réunie du Soleil & de la Lune, & qu'au contraire la nutation & l'équation de la préceſſion doivent être attribuées à l'action de la Lune ſeule. Le calcul montre de plus, que quelque arrangement qu'on ſuppoſe dans les différentes couches de la Terre, la quantité de la nutation & de la préceſſion annuelle auront toujours entr'elles le même rapport, quoique leurs valeurs abſolues varient dans chaque hypotheſe. D'où il s'enſuit que ſans connoître l'arrangement des parties de la terre, on peut trouver le rapport des forces du Soleil & de la Lune, en comparant la quantité obſervée de la nutation avec la quantité obſervée de la préceſſion. Je trouve par cette Méthode, que la force Lunaire eſt à celle du Soleil, à peu près comme 7 eſt à 3, rapport qui eſt beaucoup moindre que celui de M. *Newton*, & preſque le même que celui de M. *Daniel Ber-*

noulli, mais qui eſt déduit, ce me ſemble, de principes bien plus exacts. Je regarde cette découverte, ſi c'en eſt une, comme un des avantages les plus importans qu'on puiſſe tirer de ma Théorie. M. *Bradley* s'eſt flatté avec raiſon, que les obſervations qu'il vient de publier, pourroient y conduire. C'eſt aux Savans à juger ſi j'ai rempli ſon attente. Ce grand Aſtronome, ſuppoſant avec les Aſtronomes François la terre plus applatie que dans le cas de l'homogeneité, ſoupçonne que la force de la Lune eſt moindre que M. *Newton* ne l'a trouvée; ce qui doit en effet paroître aſſez vraiſemblable. Car plus la terre ſera applatie, plus la Lune & le Soleil agiront ſenſiblement pour mouvoir ſon Axe; ainſi puiſque la quantité de la préceſſion eſt de 50 ſecondes, & que la force du Soleil eſt connue, il faudra diminuer la force de la Lune à meſure qu on ſuppoſera la terre plus applatie. Mais ce raiſonnement, qui eſt ſans doute bon en ſon genre, ne ſçauroit nous conduire à déterminer exactement la force de la Lune, à cauſe du peu de lumieres que nous avons ſur la forme du Globe que nous habitons; le moyen que j'ai employé me paroît plus direct & plus ſûr. J'avoue cependant qu'il

qu'il ſuppoſe des obſervations très-exactes. Car ſi la nutation étoit ſeulement de deux ſecondes plus grande, le rapport de la force Lunaire à celle du Soleil ſe trouveroit beaucoup plus grand que je ne l'ai aſſigné, & beaucoup plus près de celui de M. *Newton*. Mais le peu d'altération que la Lune paroît cauſer dans le mouvement annuel de la terre autour du Soleil, ſuffiroit peut-être pour montrer que la force de la Lune eſt en effet beaucoup moindre que M. *Newton* ne l'a crû. D'un autre côté, par les obſervations du flux & reflux, la force de la Lune ſur la terre paroît plus grande que celle du Soleil ; or le rapport de 7 à 3 que nous avons trouvé entre les deux forces ſatisfait à ces deux conditions. Je crois donc que l'on peut compter pour le préſent ſur l'exactitude des obſervations de M. *Bradley*, en remarquant ſeulement que la quantité de la nutation a beſoin d'être déterminée avec la préciſion la plus rigoureuſe.

A l'égard de la denſité & de la figure des couches de la Terre, je ne vois pas que mes calculs puiſſent ſervir à la découvrir ; car on peut faire apparemment une infinité d'hypotheſes, dans leſquelles on trouveroit 50 ſecondes pour la quantité de la préceſſion annuelle des Equinoxes ; &

dans un ſi grand nombre de ſuppoſitions, celle que nous devons choiſir nous eſt inconnue. Mais par la même raiſon il y en a une infinité d'autres qui doivent être exclues, comme donnant une quantité trop grande ou trop petite pour le mouvement annuel des points Equinoctiaux. Cette conſidération m'a conduit à des Remarques ſingulieres & curieuſes. On verra, par exemple, que ſi la Terre étoit un corps entiérement ſolide, & compoſé de couches Elliptiques différemment denſes, il faudroit qu'elle fut beaucoup moins applatie qu'elle n'eſt en effet, pour que la préceſſion annuelle fût de 50 ſecondes. Cette remarque fournit, ce me ſemble, une nouvelle preuve de l'inſuffiſance des calculs de M. *Newton*; elle paroît même d'abord contraire au ſyſtême de l'Attraction : mais bien approfondie, elle lui devient très-favorable. Car quand nous regarderions la Terre comme entiérement formée de couches ſolides, rien ne nous forceroit, ce me ſemble, à donner à ces couches la figure Elliptique. Il paroît même douteux par la comparaiſon des degrés de France, de Laponie & du Perou, que la ſurface extérieure de la Terre ait une telle courbure. Mais ſans inſiſter ſur cette remarque, nous pouvons nous contenter d'ob-

ſerver que la Terre eſt en partie ſolide & en partie fluide. Or ſuivant le ſyſtême de l'Attraction, l'action du Soleil & de la Lune doit exciter dans la partie fluide un mouvement particulier, qui eſt en effet connu & obſervé depuis longtems ſous le nom de flux & reflux ; ce mouvement eſt, pour ainſi dire, affecté à la partie fluide & indépendant de celui qu'il doit y avoir dans la partie ſolide du Globe. Donc le mouvement de l'Axe de la terre vient de l'action du Soleil & de la Lune ſur la partie ſolide ; ainſi quoique la figure de la maſſe d'eau qui environne notre Globe, dépende de la figure & de la denſité des couches ſolides intérieures, ce n'eſt point à la figure de cette maſſe d'eau qu'on doit s'arrêter, en cherchant la préceſſion des Equinoxes. Pour rendre cette vérité plus ſenſible par une hypotheſe particuliere & fort ſimple, j'ai conſidéré la Terre, ainſi que je l'ai fait ailleurs (†), comme un Sphéroide Elliptique homogene couvert d'une couche de fluide dont la profondeur ſoit très-petite, par rapport au rayon de la terre, & dont la denſité ſoit différente de celle de la partie ſolide ; & j'ai montré aſſez facilement comment on pourroit accorder dans cette ſuppoſition, l'applatiſ-

(†) *Réflexions ſur la cauſe générale des Vents.* Paris, 1747.

ſement connu de la Terre, avec le mouvement connu des points Equinoctiaux.

Comme la ſolution du Problême qui fait l'objet de cet Ouvrage, eſt très-longue & très-compliquée, tant par les principes qu'elle ſuppoſe, que par les calculs qu'elle exige ; j'ai cru non-ſeulement devoir expoſer ces principes & ces calculs avec tout le détail & toute la clarté néceſſaires, mais auſſi ne devoir rien négliger de ce qui pouvoit leur prêter un nouveau jour. Outre pluſieurs Remarques particulieres qui ſervent à les appuyer, on trouvera dans cet Ouvrage une ſeconde ſolution du Problême, qui eſt un peu plus ſimple que la premiere, parce qu'elle eſt un peu moins générale, mais qui d'ailleurs conduit aux mêmes formules, quoique par une route fort différente. Cette ſolution eſt ſuivie d'un examen déraillé de la Théorie de M. *Newton* ſur la préceſſion des Equinoxes, examen où j'ai tâché de développer avec toute l'étendue convenable les réflexions que je me ſuis contenté d'indiquer dans cette Introduction.

Au reſte, comme les équations que j'ai déduites de ma Théorie ne ſont réſolues que par approximation, & ne paroiſſent pouvoir l'être que de cette maniére, j'eſpere que par une Analyſe en-

core plus exacte de mes formules, jointe au ſecours du tems & des obſervations, les Philoſophes pourront acquérir dans la ſuite de nouvelles lumieres ſur un point ſi important de l'Aſtronomie, & ſur l'uſage qu'on peut faire du ſyſtême de l'Attraction pour connoître les plus petits mouvemens de l'Axe de la terre. Les moyens qu'on peut employer pour y parvenir, ſont expoſés en peu de mots à la fin de ces Recherches.

Tel eſt le plan & l'objet de cet Ouvrage; & telle eſt la méthode que je me propoſe de ſuivre, en comparant avec le ſyſtême Newtonien les autres Phenomenes céleſtes. C'eſt par un ſemblable examen, par une Analyſe rigoureuſe, qu'il faut juger l'Attraction, & non par des raiſonnemens Métaphyſiques auſſi peu propres à détruire une hypotheſe qu'à l'établir. Il ne ſuffit pas à un ſyſtême de ſatisfaire aux Phenomenes en gros & d'une maniére vague, ni même de fournir des explications aſſez plauſibles de quelques-uns: les détails & les calculs précis en ſont la pierre de touche; eux ſeuls peuvent apprendre s'il faut adopter une hypotheſe, la rejetter, ou la modifier. Si parmi les Phenomenes que nous connoiſſons, ou parmi ceux que nous découvrirons dans la ſuite, il s'en trouve quelques-uns de contraires

à l'Attraction, nos Geométres en ſeront plus embarraſſés, & nos Métaphyſiciens plus à leur aiſe. Mais s'ils décidoient en ſa faveur, il faudroit bien prendre le parti de l'admettre, fût-on forcé de reconnoître une nouvelle propriété dans la matiére, & dût-on ſe réſoudre à n'avoir pas une idée plus nette de la vertu par laquelle les Corps s'attirent, que de celle par laquelle ils ſe choquent.

Je ne dirai rien ici de l'explication que fourniſſent les tourbillons Carteſiens de la préceſſion des Equinoxes. L'examen de cette explication n'eſt point du reſſort de cet Ouvrage, & ſeroit d'ailleurs hors de ſaiſon, dans un tems où les hypotheſes & les conjectures vagues paroiſſent enfin bannies de la Phyſique. Le ſyſtême de *Deſcartes*, n'a été, ſi on peut parler ainſi, qu'un feu paſſager; mais c'eſt un feu qui a brillé dans la nuit la plus profonde, & à cet égard il doit être regardé comme un monument du génie de ſon inventeur. Les Sciences & l'Eſprit humain ont les plus grandes obligations à ce Philoſophe; ſes erreurs même étoient au-deſſus de ſon ſiécle, & n'ont été que trop longtems au-deſſus du nôtre: mais ſes intérêts ſont fort différens de ceux des Sectateurs qui lui reſtent.

TABLE DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

INTRODUCTION. pag. vij

CHAPITRE PREMIER. *De l'action du Soleil & de la Lune ſur la terre, conſidérée comme un Sphéroide applati.* pag. 1

CHAP. II. *Propoſitions de Géometrie & de Méchanique, néceſſaires pour la ſolution du Problême.* p. 17

CHAP. III. *Solution du Problême de la préceſſion des Equinoxes.* p. 41

CHAP. IV. *Comparaiſon de la Théorie précedente avec les obſervations.* p. 53

CHAP. V. *Du rapport de la maſſe de la Lune à celle de la Terre.* p. 62

CHAP. VI. *Du mouvement que le Pôle de la Terre doit avoir ſuivant la Théorie.* p. 65

CHAP. VII. *Du changement que la nutation de l'Axe de*

la terre, & l'équation de la préceſſion doivent produire dans le lieu apparent des Etoiles. p. 73

CHAP. VIII. *Remarques ſur la Théorie précedente, qui ſervent à la confirmer.* p. 81

CHAP. IX. *Conſéquences qui réſultent de la Théorie précedente, par rapport à la figure de la Terre.* p. 95

CHAP. X. *Eclairciſſement ſur une difficulté qui peut ſe préſenter dans la ſolution générale du Problême.* p. 105

CHAP. XI. *Autre méthode pour réſoudre le Problême de la préceſſion des Equinoxes.* p. 113

CHAP. XII. *De la préceſſion des Equinoxes, en n'ayant point égard à la rotation de la Terre autour de ſon Axe.* p. 142

CHAP. XIII. *De la préceſſion des Equinoxes dans quelques hypotheſes particulieres.* p. 153

CHAP. XIV. *Remarques ſur la Théorie de la préceſſion des Equinoxes donnée par M.* Newton. p. 159

CHAP. XV. *Réflexions ſur les différens mouvemens, apparens, ou réels, que l'on peut obſerver dans l'Axe de la Terre.* p. 170

CHAP. XVI. *De la variation du Soleil en latitude, cauſée par l'action de la Lune ſur la terre.* p. 178

Fin de la Table des Titres.

RECHERCHES

RECHERCHES
SUR LA PRÉCESSION
DES EQUINOXES,
ET SUR LA NUTATION
DE L'AXE DE LA TERRE,
DANS LE SYSTÊME NEWTONIEN.

CHAPITRE PREMIER.

De l'action du Soleil & de la Lune sur la terre, considérée comme un Sphéroide applati.

LEMME I.

1. SOIT PQpq (Fig. 1) *un solide formé par la révolution d'une courbe* PQp *autour de l'Axe* Pp, *& dont tous les points tendent vers un point fixe* S *avec une force proportionnelle à une fonction quelconque de leurs distances à ce point ; je dis que la direction de la force unique qui résulte de la tendance de tous ces points vers* S,

ſera dans le plan PSp, *qui paſſe par le point* S *& par l'Axe* Pp.

Car il eſt évident que le plan *PSp* diviſe le ſolide *PQpq* en deux parties parfaitement égales & ſemblables, & placées de la même maniere, l'une au-deſſus, l'autre au-deſſous de ce plan. Soient donc deux points *k*, *k'* ſitués dans une même ligne *kk'* perpendiculaire au plan *PSp*, & également éloignés de ce plan, & ſoit *C* le centre de gravité du ſolide, qui doit être placé dans l'Axe *Pp*, comme on le voit aiſément. Il eſt évident, que ſi on décompoſe la force du point *k* vers *S* en deux autres ; l'une ſuivant *kC*, l'autre parallele à *CS*, & qu'on décompoſe de même la force du point *k'* vers *S* en deux autres, l'une ſuivant *kC*, l'autre parallele à *CS*, les deux forces ſuivant *kC* & ſuivant *k'C* ſeront égales, auſſi-bien que les deux forces paralleles à *CS*. Donc à cauſe que les points *k*, & *k'* ſont également éloignés du plan *PSp*, les deux forces ſuivant *kC*, & *k'C* ſe réduiront à une ſeule qui ſera dans le plan *PSp* & qui paſſera par *C*, & de même les deux forces paralleles à *CS* ſe réduiront à une ſeule qui ſera dans le plan *PSp*. Donc puiſque chaque point *k* a toujours un point *k'* qui lui répond dans la perpendiculaire *kk'*, & qui eſt à la même diſtance du plan *PSp*, que le point *k* ; il s'enſuit que toutes les forces qui agiſſent ſur le ſolide *PQpq* ſe réduiront à d'autres forces placées dans le plan *PSp*. Or toutes les fois que différentes forces agiſſent dans un même plan, on peut aiſément les réduire toutes à une

ſeule qui ſoit auſſi dans ce même plan. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

2. La même propoſition ſeroit encore vraie, quand le ſolide $PQpq$ ſeroit compoſé de couches de différentes denſités, pourvu que chaque couche fut d'une denſité uniforme, & fût un ſolide de révolution. Cela eſt ſi clair, qu'il eſt inutile de nous y arrêter.

COROLL. II.

3. Il eſt viſible 1° que la force qui réſulte des forces ſuivant kC & $k'C$, tend à faire avancer le centre C en ligne droite, & par conſéquent ne produit dans le ſolide $PQpq$ aucun mouvement de rotation autour de ce centre. 2°. Que la force qui réſulte des forces paralleles à CS, paſſeroit par le centre C, ſi toutes ces forces étoient égales à la force qui tire le centre C, ou ſi le ſolide $PQpq$ étoit une Sphére. D'où il s'enſuit 1°. que ſi on retranche de la force qui agit ſur chaque point k parallelement à CS, la force qui tire le point C vers S, la force qui réſulte de ces différences, eſt la ſeule qui puiſſe produire dans le ſolide $PQpq$ un mouvement de rotation autour de ſon centre. 2°. Que ſi on inſcrit un globe Ppr au ſolide $PQpq$, & qu'on prenne la différence de la force qui pouſſe chaque point k parallelement à CS ſur la force qui pouſſe le centre C, la force

qui en réſultera pour faire tourner le ſolide $PQpq$ autour du centre C, ſera la même que ſi la Sphére intérieure Ppr étoit anéantie. Le Problême ſuivant & ſes Corollaires, ſerviront à déterminer cette force & ſa direction.

COROLL. III.

4. Si on ſuppoſe l'Attraction en raiſon inverſe du quarré de la diſtance & en raiſon directe de la maſſe, & qu'on prenne S pour la maſſe placée en S qui attire les parties du ſolide $PQpq$, on aura $\frac{S}{CS^2}$ pour l'Attraction du point C, & $\frac{S \cdot CS}{Sk^3}$ pour celle du point k parallelement à CS. Donc $\frac{S \cdot CS}{Sk^3} - \frac{S}{CS^2}$ (*art. préced.*) ſera la force que l'on doit conſidérer ici dans chaque point k.

LEMME II.

5. *Soient* E, D, *deux angles quelconques, & ſoient* Sin. E, *&* Sin. D *leurs Sinus; je dis que* Sin. E × Sin. $D = -\frac{1}{2}$ Coſin. $(D + E) + \frac{1}{2}$ Coſ. $(D - E)$.

Car on ſçait que Sin. $E = \left(\frac{c^{EV-1} - c^{-EV-1}}{2V-1}\right)$, en prenant c pour le nombre dont le Logarithme $= 1$; de même Sin. $D = \left(\frac{c^{DV-1} - c^{-DV-1}}{2V-1}\right)$; donc Sin. $E \times$ Sin.

$$D = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(D+E)\sqrt{-1}} + e^{(-D-E)\sqrt{-1}}}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(D-E)\sqrt{-1}} + e^{(E-D)\sqrt{-1}}}{2}\right] = -\frac{1}{2}\text{Cos. } D+E+\frac{1}{2}\text{Cos. } D-E.$$

COROLLAIRE.

6. On prouvera de même que Cos. $E \times$ Cos. $D = \frac{1}{2}$ Cos. $D+E+\frac{1}{2}$ Cos. $D-E$, & que Sin. $E \times$ Cos. $D = \frac{1}{2}$ Sin. $D+E+\frac{1}{2}$ Sin. $D-$E. Ces propoſitions nous ſeront utiles dans la ſuite.

PROBLÈME I.

7. *Soit une couronne* KkGQqtTK (Fig. 2) *formée de deux cercles dont les rayons* C′K, C′k *différent très-peu, enſorte que la largeur* G′g *de la couronne puiſſe être cenſée infiniment petite (cette couronne peut repréſenter une des ſections de la terre par un plan perpendiculaire à ſon Axe, en regardant la terre comme un Sphéroide homogene, & faiſant abſtraction de la Sphère intérieure) : ſoit* Pp *une ligne perpendiculaire au plan de cette couronne & repréſentant l'Axe de la terre, dont* C *ſoit le centre,* PSp *un plan perpendiculaire à ce même plan, &* C′S *une ligne tirée à volonté dans le plan* PSp, *& dont on ſuppoſe la lon-*

gueur C'S *incomparablement plus grande que* C'K ; *on ſuppoſe de plus, que tous les points* g *de cette couronne ſont attirés parallelement à* CS *par des forces proportionnelles à* $\frac{S.CS}{Sg^3}$, *on demande le moment des forces* $(\frac{S.CS}{Sg^3} - \frac{S}{CS^2})$ *par rapport à un plan perpendiculaire à la ligne* CS, *& dont* CI *eſt ſuppoſée la commune ſection avec le plan* PpS, *ou, ce qui revient au même, en menant* gV *perpendiculaire au plan* PpS, *&* Vi *perpendiculaire à* CI ; *on demande la ſomme des* $G'g \times GG' \times (\frac{S.CS}{Sg^3} - \frac{S}{CS^2}) \times Ci$.

Solution. Soit menée gL parallele à $C'V$, & CL perpendiculaire au plan PSp, & ſoient nommées

kC' . . . . . : f

$G'g$ . . . . . e

l'angle $kC'g$ X

ſon Sinus gL . . . . . f Sin. X

CC' . . . . . q'

la ligne SC qui eſt cenſée conſtante . . . . u

l'angle PCS . . . . . V,

& par conſéquent ſon Sinus & ſon Coſinus . . . . . Sin. V & Cof. V

Cela poſé, il eſt viſible 1° que $G'g \times GG' = efdX$. 2°. Qu'au lieu de Sg^3, on pourra ſans erreur ſenſible mettre SV^3. 3°. Que Ci (Fig. 3) $= CI - Ii = CI - C'O = CC' \times$ Sin. $V - C'V \times$ Cof. V. 4°. Que $SV^2 = SC'^2 + C'V^2 + 2C'V \times SL = SC^2 + CC'^2 + 2CC' \times CL + C'V^2 + 2C'V \times SL = u^2 + q'q' + 2q'u$ Cof. V

$+ff(\text{Sin. } X)^2 + 2uf \text{ Sin. } X \text{ Sin. } V$; donc négligeant les termes $f^2(\text{Sin. } X^2)$ & $q'q'$ qui ſont nuls par rapport aux autres, on a $SV = V(uu + 2q'u \text{ Cof. } V + 2fu \text{ Sin. } X \text{ Sin. } V)$; d'où l'on tire l'équation ſuivante ; $\frac{S.CS}{SV^3} - \frac{S}{CS^2} = -\frac{3S}{u^3} \times (q' \text{ Cof. } V + f \text{ Sin. } X \text{ Sin. } V)$: donc la différentielle à intégrer eſt . . . . . $-\frac{3Sf^2dX}{u^3} \times (q' \text{ Coſinus } V + f \text{ Sinus } X \times \text{Sinus } V) \times (q' \text{ Sin. } V - f \text{ Sin. } X \text{ Cof. } V)$. On prendra l'intégrale de maniére qu'elle ſoit $= 0$, lorſque $X = 0$, & enſuite il faudra faire $X =$ à quatre angles droits, ou à $4D$ pour avoir l'intégrale qu'on demande. D'où il s'enſuit, qu'il faut négliger dans la différentielle tous les termes où dX ſe trouveroit multiplié par Cof. X ou Cof. $2X$, ou Sin. X ou Sin. $2X$ &c. parce que l'intégrale de ces termes eſt nulle lorſque $X = 0$, & lorſque $X = 4$ droits. Donc à cauſe de $(\text{Sin. } X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{Cof. } 2X}{2}$ (*art.* 5), la différentielle à intégrer, ſera ſimplement . . . . . $-\frac{3Sf^2dX}{u^3} \times (q'q' \text{ Cof. } V. \text{ Sin. } V - \frac{ff}{2} \text{ Cof. } V. \text{ Sin. } V)$ dont l'intégrale, quand $X = 4$ droits, eſt $-\frac{3.4Sf^2D}{u^3} \times \text{Cof. } V. \text{ Sin. } V(q'q' - \frac{ff}{2})$.

REMARQUE.

8. On peut encore trouver d'une autre maniére la

ſomme des $\frac{G'g \times GG' \times S.CS.Ci}{Sg^3} - \frac{G'g \times GG' \times S.Ci}{CS^3}$: ſoit nommée kL, x, on aura $G'g \times GG' = \frac{6fdx}{V[2fx-xx]}$, & ſuppoſant q le Sinus de l'angle PCS, & k le Coſinus de ce même angle, on trouvera facilement que $\frac{1}{SV^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3}{u^4}(kq' + qV[2fx-xx])$. Donc la ſomme des $\frac{G'g \times GG' \times S.CS.Ci}{SV^3} - \int \frac{G'g.GG'.S.}{CS^3} \times Ci$

$= \int (\frac{6fdx}{V[2fx-xx]} \times [3qV[2fx-xx] + 3kq'] \times \frac{S}{u^3} \times [-qq' + kV[2fx-xx]])$; on peut même remarquer ici en paſſant, que par la propriété du centre de gravité C, $\int \frac{G'G \times G'g.Ci.S}{CS^2} = 0$: de plus, ſi on prend un point γ tel $K\gamma = KG$, on trouvera le moment de ce point en mettant $-V[2fx-xx]$ au lieu de $V[2fx-xx]$ dans l'expreſſion précédente, ſans changer le ſigne de $\frac{+dx}{V[2fx-xx]}$. Donc la ſomme des momens cherchés, ſera . . . . . .

$= -\frac{S}{u^3} \times 36f \times (\int \frac{2kqq'q'dx}{V[2fx-xx]} - 2\int kqdx.V[2fx-xx]$

$= -\frac{3S6f}{u^3}(2kqq'q'\pi - qk\pi ff)$ en appellant 2π le rapport de la circonférence au rayon. Or $q =$ Sin. V ; $k =$ Coſ.

Cos. V; $2\pi = 4D$. Donc cette expreſſion s'accorde avec la précedente.

COROL. I.

9. Soit $2a$ l'Axe Pp de la terre (Fig. 2), pC', b; $a + a\alpha$ le rayon de l'Equateur, α étant une petite quantité qui marque la différence des Axes dans l'hypotheſe de la terre homogene, on aura $ff = 2ab - bb$, $q' = a - b$, $\epsilon = \alpha f$, & l'intégrale précedente ſe changera en

$$-\frac{35a \cdot 4D}{n^3} \times \text{Cos. } V \times \text{Sin. } V \times [[a-b]^2 (2ab - bb) - (\frac{2ab - bb}{2})^2] = -\frac{35a \text{ Sin. } V. \text{ Cos. } V \times 4D}{n^3} \times [[a-b]^2 \times (aa - [a-b]^2) - (\frac{aa - [a-b]^2}{2})^2].$$

COROL. II.

10. Pour avoir maintenant le moment total de la croute ou double Ménisque qui environne le globe, il faut multiplier la quantité précedente par db, & en prendre l'intégrale de maniére qu'elle ſoit = o quand b = o: ce qui donnera $-\frac{35a \cdot \text{Sin. } V \cdot \text{Cos. } V \cdot 4D}{n^3} \times$

$$[-aa\frac{(a-b)^3}{3} + \frac{a^5}{3} + \frac{[a-b]^5}{5} - \frac{a^5}{5} - \frac{a^4 b}{2} - \frac{2aa(a-b)^3}{2 \cdot 3} + \frac{2a^5}{3 \cdot 2} + \frac{[a-b]^5}{5 \cdot 2} - \frac{a^5}{5 \cdot 2}].$$

Donc lorſque

$b = 2a$, cette intégrale devient $-\frac{35a \text{ Sin. } V. \text{ Cof } V. 4D}{n^3} \times -\frac{4a^5}{15}$.

COROL. III.

11. Nous avons prouvé ci-deſſus, que la force réſultante des forces des points k parallélement à CS, doit être dans le plan PSp; & de plus, il eſt évident que cette force doit avoir une direction parallele à CS, & qu'elle doit être = à la ſomme des forces des points k. Soit donc Ψ cette force, $H\lambda$ (Fig. 4) ſa direction dans le plan PSp, $CH = L$, la perpendiculaire $C\lambda$ ſera $= L$ Sin. V; & l'on aura par les principes de la ſtatique, $\Psi \times L$ Sin. V = à l'intégrale trouvée à la fin du Corol. précedent. Donc $\Psi . L = \frac{35a . \text{Cof. } V. 4D}{n^3} \times \frac{4a^5}{15}$.

REMARQUE.

12. Nous n'aurons beſoin dans les calculs ſuivans, que de la valeur de $\Psi \times L$ ſans celle de Ψ & de L; cependant on peut remarquer en paſſant que $\Psi = 0$, & que par conſéquent L eſt infinie. Car l'intégrale de $-\frac{35fG\,dX}{n^3} \times (q' \text{ Coſinus } V + f \text{ Sinus } X \times \text{Sinus } V)$ eſt $-\frac{35a \text{ Cof. } V. 4D}{n^3}(a - b)ff$: or cette quantité étant multipliée par db, & enſuite intégrée, eſt $= 0$, lorſque $b = 0$, & lorſque $b = 2a$.

COROLL. IV.

13. Si la terre n'étoit pas ſuppoſée un Sphéroide homogene, mais qu'elle fût compoſée de couches dont les rayons fuſſent f, les ellipticités φ ou en général αF, F étant une fonction de f, & les denſités Δ, alors $\Psi \times L$ ſeroit $= \frac{3S \cdot 4D \text{ Cof. } V}{3} \times \frac{4}{15} \int \Delta d (f^3 \varphi) = \frac{4\alpha}{15} \int \Delta d (f^3 F) \times \frac{3S \cdot 4D}{u^3} \times \text{Cof. } V$; & en général il eſt très-facile de voir que $\Psi \times L$ ſera toujours proportionnel à $3S \times \frac{4D \times \text{Cof. } V}{15 u^3}$, quel que ſoit le ſolide $PpQK$, pourvû qu'il ſoit un ſolide de révolution peu différent d'une Sphére; car la quantité $\frac{3S \times 4D}{u^3} \times \text{Cof. } V$. Sin. V multiplie tous les termes de la différentielle, & eſt traitée comme conſtante dans l'intégration. C'eſt pourquoi on peut en général ſuppoſer $\Psi \times L = \frac{3A \times 4D \times \text{Cof. } V \times S}{15 u^3}$, A étant une quantité qui dépend de l'applatiſſement & de la denſité des différentes couches du Sphéroide; & on remarquera que S repréſente ici la maſſe du ſoleil, & u ſa diſtance à la terre.

COROLL. V.

14. Soit CL (Fig. 4) le rayon où ſe trouve la Lune dans ſon orbite, lorſque le Soleil eſt en S: ſoit menée parallelement à CL la ligne $H'\lambda'$, qui repréſente la direction de la force réſultante de l'Attraction lunaire;

il eſt viſible qu'en nommant Ψ' cette force, CH', L', λ la maſſe de la Lune, CL, u', l'angle PCL, V', on aura $\Psi' L' = \frac{A \times 4D \times \text{Cof. } V' . 3\lambda}{15 u'^3}$; & on remarquera que CL ne ſe trouve dans le plan PSp, que lorſque la Lune eſt dans les nœuds.

PROBLÈME II.

15. *Imaginons qu'on faſſe paſſer par* SC, (Fig. 5) *un plan* SCeE *qui repréſente l'écliptique, & que* Ee, CM, hs, h'l *ſoient la projection des lignes* Pp, CL, Hλ, H'λ' *ſur ce plan ; on demande l'équation entre le Coſinus de* PCS *& celui de* ECS, *& entre le Coſinus de* LCP, *& celui de* MCE.

1°. Soit nommé l'angle ECS, v, & ſoit menée par le point h, qui eſt la projection du point H, (Fig. 6) la ligne he perpendiculaire à CS, il eſt facile de voir que He ſera auſſi perpendiculaire à CS ou Ce. Car on aura $He^2 + Ce^2 = Hh^2 + he^2 + Ce^2 = Ch^2 + Hh^2 = CH^2$. Donc le Coſinus de l'angle eCp ou SCP ſera au Coſinus de l'angle ECS ou eCh, comme $\frac{eC}{CH} : \frac{eC}{Ch}$; donc en appellant y le Coſinus de l'angle pCe ou HCh, on aura Cof. V : Cof. $v :: Ch : CH :: y : 1$. Donc Cof. $V = y$ Cof. v.

2°. Soit CL (Fig. 7) le rayon dans lequel la Lune eſt ſuppoſée ſe trouver, & qui (*hyp.*) eſt diſtant de

l'Ecliptique de la quantité LM, ſoit P le Pôle de la terre, PK la perpendiculaire abbaiſſée du Pôle P ſur le plan de l'écliptique CMK, $K\sigma$ une perpendiculaire à CM, PR perpendiculaire à CR, & RQ perpendiculaire à CM, ou, ce qui revient au même, parallele à LM; ayant joint KS, ſoit appellée μ la tangente de l'angle σKQ, l'angle $KC\sigma$, v', p la tangente de l'angle LCM, & ſoit comme ci-deſſus $CP = 1$, $CK = y$, l'angle $PCR = V'$, on aura CR ou Cof. $V = CQ \times \sqrt{[1 + pp]} = \sqrt{[1 + pp]} \times (C\sigma + \sigma Q) =$ (y Cof. $v' + y\mu$ Sin. v') $\sqrt{[1 + pp]}$; or $CR^2 + RP^2 = CP^2 = 1$, & $RP^2 = KQ^2 + (PK - RQ)^2 =$ $(1 + \mu\mu).yy$ Sin. v'^2 (†) $+ (\sqrt{[1 - yy]} - yp$ Cof. $v' - y\mu p$ Sin. $v')^2$. On aura donc une équation d'où l'on tirera la valeur de μ en p, y, & v'; mais pour faire le calcul de la maniére la plus ſimple, on remarquera que p doit toujours être une petite quantité, parce que l'orbite de la Lune fait un petit angle avec le plan de l'Ecliptique, & que μ doit être auſſi une petite quantité, puiſque μ ſeroit $= 0$, ſi p étoit $= 0$. C'eſt pourquoi on ſe contentera de prendre dans l'équation $CR^2 + RP^2 = 1$, les termes où m & p ſe rencontrent ſans être

(†) Cette expreſſion Sin. v^2, ou Cof. v^2, ou en général Sin. A^2 & Cof. A^2, A étant un angle quelconque, déſignera toujours dans la ſuite le quarré du Sinus de l'angle A, ou de ſon Cof. & non le Sinus du quarré, comme on pourroit être porté à le croire par l'expreſſion même qui ſert à le déſigner, & que nous avons choiſie comme plus commode.

ni multipliés l'un par l'autre, ni élevés au quarré, cē qui donnera yy Cos. $v'^2 + 2yy\mu'$ Cos. v' Sin. $v' + yy$ Sin. $v'^2 + 1 - yy - 2yp$ Cos. $v' \sqrt{[1-yy]} = 1$; donc $\mu = \frac{p\sqrt{[1-yy]}}{y \text{ Sin. } v'}$; donc puisque l'on a Cos. $V =$ $(y$ Cos. $v' + y\mu$ Sin. $v')\sqrt{[1+pp]}$, comme nous l'avons vû plus haut; il s'ensuit que Cos. $V' = (y$ Cos. $v' + p \times \sqrt{[1-yy]}) \times \sqrt{[1+pp]}$. *Ce Q. F. Tr.*

Nous avons supposé dans la Figure 7, que les points L & P étoient au-dessus du plan de l'Ecliptique; au lieu que dans la Figure 5, ils sont au-dessous. C'est toute la différence qu'il y a entre ces deux Figures: d'où il s'ensuit, que si on appelle y le Cosinus de l'angle pCe (Fig. 5), l'angle LCP, V', l'angle MCE, v', & la perpendiculaire LM, p, on aura de même le Cosinus de $V' = (y$ Cos. $v' + p\sqrt{[1-yy]}) \times \sqrt{[1+pp]}$.

REMARQUE I.

16. Il n'est pas difficile de voir que la valeur de μ doit être constante, quelle que soit la position du point P (Fig. 7) dans l'Arc PL, la ligne CL restant fixe; car les lignes KP, PR demeurant toujours paralleles à elles-mêmes, la commune section KQ du plan KPR avec le plan KCM, fait toujours le même angle avec CM, & par conséquent fait aussi toujours le même angle $QK\sigma$ avec la perpendiculaire $K\sigma$ à CM; d'où il s'ensuit, que la tangente μ de ce dernier angle est cons-

tante. Cependant elle ne l'eſt point dans notre équation : car $\sqrt{[1-yy]}$ n'eſt pas exactement en raiſon conſtante avec y Sin. v' ; il faudroit pour cela que p fut $= o$. Mais comme p eſt fort petit, il s'enſuit que $\frac{\sqrt{[1-yy]}}{y \text{ Sin. } v'}$ eſt à peu près conſtant, & cela ſuffit pour donner la valeur approchée de μ, qui eſt tout ce qu'on cherche ici.

REMARQUE II.

17. Imaginons dans le plan $ESCe$ (Fig. 8) une perpendiculaire Zz à Ee, & ſur cette perpendiculaire un plan ZOz, auſſi perpendiculaire à Ee ; prolongeons enſuite les lignes $H\lambda$, $H'\lambda'$ juſqu'à ce qu'elles rencontrent ce plan en a, a', je dis que ſi on mene dans le plan ZOz la ligne Cbb' perpendiculaire à Zz, & qu'on tire ab', $a'b$; ad, $a'd'$ perpendiculaires à Cb, & à Cd, on aura 1°. $ad = Hh$; car $H\lambda a$ étant (*hyp.*) parallele au plan EZe, les perpendiculaires Hh, ad à ce plan ſeront égales. 2°. ab ou $Cd = \frac{Cb \times \text{Sin. } v}{\text{Cof. } v}$: car l'angle $Chd = v$, puiſque hd eſt évidemment la projection de $H\lambda a$; 3°. ſi la ligne $H'\lambda'$ étoit parallele au plan EZe, on trouveroit de même $a'd' = H'h'$, & Cd ou $a'b' = \frac{Cb' \times \text{Sin. } v'}{\text{Cof. } v'}$; mais comme $H'\lambda'$ n'eſt pas parallele au plan EZe, menons par le point H' (Fig. 9) une ligne $H'a''$ parallele à ce plan, qui rencontrera $d'a'$ en a'', & il eſt

évident que $H'a''$ ſera = & parallele à $h'd'$, que $a''d'$ ſera = & parallele à $H'h'$, que $h'd' = \frac{Ch'}{\text{Cof. } v'} = \frac{L'.y}{\text{Cof. } v'}$; & que $\frac{a'a''}{H'a''} = \frac{LM}{CM} = p$. Donc $a'd' = a''d - a''a' = H'h' - h'd' \times p$.

Coroll. I.

18. Donc conſervant les noms donnés ci-deſſus, on aura ad (Fig. 10) $= L\sqrt{[1 - yy]}$; ab ou $Cd = Ly \times \frac{\text{Sin. } v}{\text{Cof. } v}$; $Cd' = L'y\frac{\text{Sin. } v'}{\text{Cof. } v'}$; $a'd' = L'\sqrt{[1 - yy]} - \frac{L'yp}{\text{Cof. } v'}$.

Coroll. II.

19. Donc au lieu des puiſſances ſuivant $H\lambda$, & $H'\lambda'$; (Fig. 8) on peut ſuppoſer au point a (Fig. 10) une puiſſance qui tire parallélement à hd, & au point a' une puiſſance qui tire parallélement à $h'd'$, & une autre qui tire ſuivant $a'd'$. La premiere de ces puiſſances ſera = Ψ (*art.* 11); la ſeconde = (*art.* 14) $\frac{\Psi'}{\sqrt{[1 + pp]}}$; que je nomme Ψ'' pour abréger; la troiſiéme ſera $\Psi'' p$.

CHAPITRE

CHAPITRE II.

Propoſitions de Géometrie & Méchanique, néceſſaires pour la ſolution du Problême.

PROBLÊME III.

20. SOIENT ECe, (Fig. 11) ZCz, *deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, &* CE′ *une ligne perpendiculaire au plan de ces deux-là, enſorte que* E′Ce, E′Cz, *ſoient deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, & au plan* eCz. *On ſuppoſe que le point* Q *du plan* E′Cz, *ſoit tiré perpendiculairement à ce plan par une puiſſance* G, *& que le point* G *du plan* E′Ce *ſoit tiré perpendiculairement au plan* E′Ce *par une puiſſance* F, *& l'on propoſe de changer ces puiſſances en deux autres qui n'agiſſent que ſur le ſeul plan* E′Cz; *c'eſt-à-dire, qui agiſſent ſur des points placés dans ce plan.*

Soient menées les lignes QP' & QD perpendiculaires à Cz & à CE', & GE', GH perpendiculaires à CE' & à Ce; ſuppoſons de plus $QP' = \xi$, $DQ = \chi$, $GH = \zeta$, $GE' = \theta$. Soit menée enſuite la ligne $E'F$ parallele à Cz, qui rencontre CQ prolongée en F, & ſoit achevé le parallélogramme $E'FKG$. Il eſt certain par les élémens de la Méchanique, qu'au lieu de la puiſſance G qui agit au point Q, on peut en ſubſtituer deux autres en F, & en C, qui agiſſent parallélement

à la puiſſance G, dont la ſomme ſoit égale à G, & qui ſoient entr'elles en raiſon de CQ à QF. Donc la puiſſance placée en F & agiſſant ſuivant FK, ſera $= \frac{G \times CQ}{CF} = \frac{G \times CD}{CE'} = \frac{G\xi}{\zeta}$, & la puiſſance qui agit ſuivant Ce ſera $G - \frac{G\xi}{\zeta}$. Or la puiſſance $\frac{G\xi}{\zeta}$ qui agit ſuivant FK ou Kf, & la puiſſance F, qui agit ſuivant GK ou Kk, ſe réduiſent à une ſeule ſuivant Kn ou NK, le point N étant tel que $FN : FK :: F : \frac{G\xi}{\zeta}$; l'on peut donc ſuppoſer deux puiſſances appliquées au point N, l'une parallele à FK ou Ce & $= \frac{G\xi}{\zeta}$, l'autre parallele à GK, & agiſſant ſuivant NF, laquelle ſoit $= F$. Or ſi on tire CN, & qu'on prolonge QD juſqu'à ce qu'elle rencontre CN en B, il eſt viſible que la puiſſance $\frac{G\xi}{\zeta}$ appliquée en N, & la puiſſance $G - \frac{G\xi}{\zeta}$ appliquée en C ſuivant Ce, qui ſont entr'elles, comme on l'a vu, en raiſon de CQ à QF, ou de CD à DE', ſont auſſi par conſéquent en raiſon de CB à BN. Donc ces deux puiſſances peuvent ſe réduire à une ſeule placée au point B, qui ſoit $= G$, & qui agiſſe parallélement à Ce.

Donc les deux puiſſances propoſées ſe réduiſent à deux autres, dont l'une agit parallélement à Ce ſur le point B placé dans le plan $E'Cz$, & l'autre ſui-

vant NE' ſur le point E' placé dans le même plan. La premiere de ces puiſſances eſt $= G$; la ſeconde eſt $= F$. *Ce Q. F. Tr.*

COROLLAIRE I.

21. Puiſque $FN : FK$ ou $GE' :: F : \frac{G\xi}{\zeta}$, on aura $FN = \frac{F.\theta.\zeta}{G\xi}$; de plus $FE' = \frac{QD \times GH}{QP'} = \frac{\chi\zeta}{\xi}$; donc $E'N = \frac{F.\theta.\zeta}{G\xi} - \frac{\chi\zeta}{\xi}$; donc BD ou $\frac{E'N \times \xi}{\zeta} = \frac{F.\theta}{G} - \chi$.

Donc ſi on tire par le point B une ligne $BL =$ & parallele à QP', on aura $BL = \xi$; & ſi on nomme BD , ϱ, on aura $\varrho = \frac{F.\theta}{G} - \chi$; de plus CE' qui eſt $=$ à GH, ſera ζ ; & l'on ſe ſouviendra que les points B, E' ſont ceux où les puiſſances G & F ſont maintenant appliquées.

COROLL. II.

22. Imaginons préſentement, que tandis que le point E' (Fig. 12) eſt tiré ſuivant $E'F$ par la puiſſance F, & que le point B eſt tiré perpendiculairement au plan $E'Cz$ par la puiſſance G, le point V du plan eCz ſoit tiré perpendiculairement au plan eCz par une puiſſance $= \Pi$; enſorte que menant les perpendiculaires $V\pi$, VR , on ait $CR = \mu$, $C\pi = \nu$; on propoſe de réduire ces trois puiſſances à d'autres qui agiſſent ſur des points placés dans le plan $E'Cz$.

Ayant joint VL, il eſt viſible que la puiſſance G qui agit en B parallélement à $C\pi$ ou RV peut ſe décompoſer en deux autres, l'une parallele à LV, l'autre parallele à RL; la premiere de ces puiſſances ſera $= \frac{G \times LV}{RV}$, la ſeconde $= \frac{G \times LR}{RV}$. Or $LR = \mu + \varrho$, puiſque BD ou $CL = \varrho$, & $CR = \mu$; donc auſſi $LV = \sqrt{[vv + (\mu + \varrho)^2]}$; donc la puiſſance G parallele à $C\pi$, & agiſſant ſur le point B ſe change en deux autres, dont l'une $\frac{G\sqrt{[v^2 + (\mu+\varrho)^2]}}{v}$ agit ſur ce point B parallélement à LV, l'autre $\frac{G(\mu+\varrho)}{v}$ agit ſur ce même point ſuivant BT dans le prolongement de DB.

Maintenant, ſoit Bg (Fig. 13) la direction de la puiſſance qui agit au point B parallélement à LV, & Vl la direction de la puiſſance que j'ai nommé Π, & qui eſt perpendiculaire à LV; il eſt viſible que de ces deux puiſſances il en réſulte une ſuivant lh ou $Z'l$, telle que BZ' eſt à LV ou $\sqrt{[v^2 + (\mu+\varrho)^2]}$ comme Π eſt à $\frac{G\sqrt{[v^2+(\mu+\varrho)^2]}}{v}$; donc $BZ' = \frac{\Pi \cdot v}{G}$, & $LZ' = \xi - \frac{M \cdot v}{G}$. Donc le point Z' qui eſt tiré ſuivant $Z'l$, peut être cenſé tiré parallélement à LV par une force égale à $\frac{G\sqrt{[v^2+(\mu+\varrho)^2]}}{v}$, & ſuivant $Z'B$ par une force $= \Pi$.

Donc au lieu des trois puiſſances propoſées, on

peut en ſubſtituer quatre autres ; dont la 1re F (Fig. 12) agiſſe au point E' ſuivant $E'F$, la ſeconde $\frac{G(\mu+\varepsilon)}{,}$ agiſſe au point B ſuivant BT, la troiſiéme $\frac{GV[\nu^2+(\mu+\varepsilon)^2]}{,}$ agiſſe au point Z' parallélement à LV, & enfin la quatriéme Π agiſſe au point Z' ſuivant $Z'B$. *Ce Q. F. Tr.*

COROLL. III.

23. Imaginons préſentement dans le plan $E'Zz$ (Fig. 14) deux points a, a' tels que ceux dont nous avons parlé dans le Chapitre précedent, dont l'un a ſoit tiré par une puiſſance $= \Delta$, parallélement à une ligne hd qui fait avec Ce l'angle $Chd = v$, & dont l'autre a' ſoit tiré ſuivant $a'd'$ par une puiſſance $= \Gamma$, & tiré de plus par une puiſſance $= \Omega$, parallélement à une ligne $h'd'$ qui faſſe avec Ce l'angle $Ch'd' = v'$: ſoit fait $Cb = \xi$, $ab = \chi'$, $Cb' = \zeta'$, $a'b' = \theta'$; ſuppoſons enfin, que les puiſſances qui tirent les points a, a', faſſent équilibre à celles qui agiſſent ſur les points B, E', Z déterminés dans le Corol. précedent : on demande la loi de l'équilibre entre ces puiſſances.

Soit tirée par le point C (Fig. 15) dans le plan eCz la ligne Cn qui faſſe avec Ce, un angle $= v$; il eſt viſible que la puiſſance qui tire le point a ſera parallele à nC. Or ſoit O le point où la ligne VL coupe Cn, il eſt évident que la puiſſance qui tire le point a

peut se décomposer en deux autres ; dont l'une agisse parallélement à Og, & l'autre parallélement à gn, & que la premiere de ces puissances sera $= \frac{\Delta \times Og}{On}$, la $2^{de} = \frac{\Delta \times gn}{On}$: donc la $1^{re} = \frac{\Delta \times VL}{Vm}$, & la $2^{de} = \frac{\Delta \times Lm}{Vm}$, en menant Vm parallele à Cn. Or $Lm = LR - Rm = \mu + \varrho - \frac{\nu \text{ Sin. } v}{\text{Cof. } v}$, & $Vm = \frac{\nu}{\text{Cof. } v}$. Donc le point a est tiré parallélement à LR par une puissance égale à $\frac{\Delta \left(\mu + \varrho - \frac{\nu \text{ Sin. } v}{\text{Cof. } v}\right)}{\nu} \times \text{Cof. } v$, & parallélement à VL par une puissance $= \frac{\Delta \sqrt{[\nu^2 + (\mu + \varrho)^2]} \text{ Cof. } v}{\nu}$. On verra de même que le point a' est tiré parallélement à LR par une force $= \frac{\Omega \left(\mu + \varrho - \frac{\nu \text{ Sin. } v'}{\text{Cof. } v'}\right)}{\nu} \times \text{Cof. } v'$, & parallélement à VL par une force $= \frac{\Omega \text{ Cof. } v' \sqrt{[(\mu + \varrho) + \nu^2]}}{\nu}$: la question se réduit donc à celle-ci.

Soient a, (Fig. 16) a', Z', B, E' cinq points dans le plan $E'Zz$, tels que CE' & BZ' soient perpendiculaires à Zz, & soient tirés ces points par neuf puissances ; savoir le point a suivant ab par une force $= \Delta'$, le point a' suivant $a'b'$ par une force $= \Omega'$, & suivant $a'd'$ par une force $= \Gamma$, le point B suivant BT par une

force $= G'$, le point E' ſuivant $E'F$ par une force $= F$, le point Z' ſuivant $Z'B$ par une force $= K$; enfin, les points a', a, Z' chacun par une force parallele à une ligne donnée de poſition & placée hors du plan $E'Zz$: il faut trouver la loi de l'équilibre entre toutes ces puiſſances.

Il eſt évident que les puiſſances paralleles à la ligne donnée de poſition, qui agiſſent ſur les points Z', a, a', doivent être en équilibre entr'elles, indépendamment des autres, parce que ces puiſſances ne ſont pas comme les autres dans le plan $E'Zz$. Delà il eſt très-facile de conclure, que la force qui tire le point Z', doit être $=$ à la ſomme des forces qui tirent les points a, a', & que de plus, les forces qui tirent les points a, a' doivent être entr'elles en raiſon de $a'Z'$ à aZ', & que les points a', a, Z' doivent être en ligne droite. Donc ſi on appelle Z' la puiſſance qui agit ſur le point Z; a, celle qui agit ſur le point a, & a' celle qui agit ſur le point a, on aura 1°. $a + a' = Z'$; 2°. $Z' \times Z'L = a \times ad + a' \times a'd'$; 3°. $Z' \times CL = a \times Cd + a' \times Cd'$.

Maintenant, puiſque les points b, b', E', ſont tirés (*hyp.*) parallélement à Cz par des forces Δ', Ω', F; il s'enſuit qu'au lieu de ces trois forces, on peut en ſubſtituer une ſeule $= \Delta' + \Omega' + F$ qui agiſſe ſuivant RX, (Fig. 17) parallélement à Cz, & qui ſoit telle que $CR \times (\Delta' + \Omega' + F) = \Delta' \times Cb + \Omega' \times Cb' + F \times CE'$; or cette puiſſance combinée avec la puiſſance K qui agit ſuivant $Z'B$ ou BK, ſe réduit à une ſeule

puiſſance qui agit ſuivant une certaine ligne QG : de même la puiſſance G' qui agit ſuivant BT, ou TO étant combinée avec la force Γ qui agit ſuivant $a'd'$, ſe réduit à une ſeule puiſſance qui agit ſuivant une certaine ligne Tg ; & comme (*hyp.*) il y a équilibre entre les puiſſances $a, a', Z', G', \Delta', \Omega', F, \Gamma, K$, & que les puiſſances a, a', Z', ſont déja en équilibre entr'elles, il s'enſuit que les ſix autres puiſſances ſont auſſi en équilibre. Donc les puiſſances ſuivant QG & ſuivant Tg qui en réſultent, doivent être en équilibre entr'elles, c'eſt-à-dire qu'elles doivent être égales & directement oppoſées. Donc 4°. $\Gamma = K$. 5°. $G' = \Delta' + \Omega' + F$. 6°. BQ doit être à BT, comme K eſt à $\Delta' + \Omega' + F$; c'eſt-à-dire $(Cd' - CL) \times K = (\Delta' + \Omega' + F) \times (CR - LB) = \Delta' \times Cb + \Omega' \times Cb' + F \times CE' - G' \times LB$. Ces trois équations jointes avec les trois précedentes, renferment la loi d'équilibre cherchée. *Ce Q. F. Tr.*

COROLL. IV.

24. Par le Corollaire précedent, la puiſſance a (Figure 16) $= \frac{\Delta \sqrt{[r^2 + (\mu + \varrho)^2]} \cdot \text{Cof. } v}{,}$, la puiſſance $a' = \frac{\Omega \text{ Cof. } v' \sqrt{[r^2 + (\mu + \varrho)^2]}}{,}$; de plus par le Corol. 2, la puiſſance $Z' = \frac{G \sqrt{[r^2 + (\mu + \varrho)^2]}}{,}$; d'où il s'enſuit que la premiere des ſix équations du Corol. précedent, ſe changera

changera en celle-ci, Δ Cos. $v + \Omega$ Cos. $v' = G$ ..... & si on suppose que les puissances Δ, Ω, soient comme dans l'*art.* 19. Ψ' & Ψ'', on aura . . . . . Ψ Cos. $v + \Psi'' \times$ Cos. $v' = G$ . . . . . (A)

De même à cause de $Z' = \frac{G\sqrt{[1^2 + (\mu+\xi)^2]}}{1}$, de $LZ' = \xi - \frac{\Pi.1}{G}$ (*art.* 22), de $ad = L\sqrt{[1-yy]}$ (*art.* 18), & de $a'd' = L'\sqrt{[1-yy]} - \frac{L'yp}{\text{Cos. } v'}$, on aura au lieu de la seconde équation $\frac{G\xi}{1} - \Pi = \frac{\Delta . L\sqrt{[1-yy]}}{1} \times$ Cos. $v +$ $\frac{\Omega}{1}(L'\sqrt{[1-yy]} - \frac{L'yp}{\text{Cos. } v'}) \times$ Cos. v' : ou $G\xi - \Pi.1 = \Psi \times$ Cos. $v . L\sqrt{[1-yy]} + \Psi''$ Cos. $v' . L'\sqrt{[1-yy]} - \Psi'' L'py$ . . . . . (B)

Par la même raison, à cause de $CL = BD = \frac{F.\vartheta}{G} - \chi$, (*article* 21), de $Cd = \frac{Ly \text{ Sin. } v}{\text{Cos. } v}$, & de $Cd' = \frac{L'y \text{ Sin. } v'}{\text{Cos. } v'}$, (*art.* 18); on aura $\frac{G}{1} \times (\frac{F.\vartheta}{G} - \chi) = \frac{\Psi \text{ Cos. } v}{1} \times \frac{Ly \text{ Sin. } v}{\text{Cos. } v} + \frac{\Psi' \text{ Cos. } v'}{1} \times \frac{L'y \text{ Sin. } v'}{\text{Cos. } v'}$; ou $F.\vartheta - G.\chi = \Psi . Ly$ Sin. $v + \Psi'' . L'y$ Sin. v' . . . . . (C)

L'équation $\Gamma = K$ se réduira de même à $\Psi'' p = \Pi$ . . (D) car $\Pi = K$ (*article* 22 *&* 23); & (*art.* 19 *&* 23) $\Gamma = \Psi'' p$.

De même l'équation $G' = \Delta' + \Omega' + F$ se changera en

celle-ci ; $\frac{G(\mu+\varrho)}{,} = \frac{\Psi\,(\mu+\varrho-\frac{,\,\text{Sin. }v}{\text{Cof. }v})\,\text{Cof. }v}{,} +$

$\frac{\Psi''\,(\mu+\varrho-\frac{,\,\text{Sin. }v'}{\text{Cof. }v'})\,\text{Cof. }v'}{,} + F \ldots\ldots$

ou, ſubſtituant la valeur de G tirée de l'équation A,

$F = \Psi\,\text{Sin. }v + \Psi''\,\text{Sin. }v' \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$

Enfin, la derniere équation ſe change en $K \times$

$(\frac{L'y\,\text{Sin. }v'}{\text{Cof. }v'} - \frac{F.\theta}{G} + \chi) = F.\zeta - \frac{G(\mu+\varrho)}{,} \times \xi +$

$[\Psi\,\text{Cof. }v\,\frac{(\mu+\varrho)}{,} - \Psi\,\text{Sin. }v] \times L\sqrt{[1-yy]} +$

$[\Psi''\,\text{Cof. }v'\,\frac{(\mu+\varrho)}{,} - \Psi''\,\text{Sin. }v'] \times$

$[L'\sqrt{[1-yy]} - \frac{L'yp}{\text{Cof. }v}]$.

Si on met dans cette équation à la place de K ſa valeur Π ou $\Psi'' p$, à la place de $G\xi$ ſa valeur tirée de l'équation B, & à la place de $\frac{F\theta}{G} - \chi$ ſa valeur ϱ ; (*article* 21) on aura $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$F.\zeta - \Pi.\mu = \Psi\,\text{Sin. }v.L\sqrt{[1-yy]} + \Psi''.L'\,\text{Sin. }v' \times \sqrt{[1-yy]}. \ldots\ldots\ldots\ldots (F)$

PROBLEME IV.

25. *Soit* Pp (Fig. 18) *une ligne dont la projection ſur le plan* ZEe *ſoit* Ee ; Zz *une ligne perpendiculaire*

à Ee *dans le plan* ZEe, CE' *une ligne perpendiculaire au plan* ZEe, C'K *une ligne menée perpendiculairement à* Cp *par un point quelconque* C' *de la ligne* Cp, *& dans le plan* E'Cp, KG *un Arc de cercle décrit d'un rayon quelconque* CK', GL *le Sinus de cet Arc, &* GV *ſon Coſinus,* γ *la projection du point* G *ſur le plan* EZe: *on demande l'expreſſion analytique de la diſtance* Gγ *du point* G *au plan* ZEe, *de la diſtance* γQ *du point* γ *à la ligne* Ce, *& enfin de la diſtance* γO *ou* QC *du point* γ *à la ligne* Cz.

Soit comme dans l'*art.* 15, y le Coſinus de l'angle pCe, & comme dans l'*art.* 7, l'angle $KC'G = X$, ſon rayon $KC' = f$, le Sinus $GL = f$ Sin. X & $GV = f \times$ Coſin. X, $Cp = a$, $C'p = b$; il eſt évident que le plan $KC'G$ étant (*hyp.*) perpendiculaire à Cp, & l'angle $KC'V$ étant droit, la ligne $C'V$ eſt perpendiculaire aux lignes KC', $C'p$, & par conſéquent au plan $E'Cp$. Donc $C'V$ eſt parallele à Cz; auſſi-bien que GL: donc 1°. $\gamma Q = GL = f$ Sin. X; 2°. $G\gamma = LQ$. Or menant $C'q$ perpendiculaire à Ce, & $C'i$ perpendiculaire à LQ, on aura $LQ = Li + iQ = C'q + C'L \times y = (a-b)\sqrt{[1-yy]} + f$ Coſin. $X.y$; 3°. Enfin CQ ou $Cq - C'i = (a-b)y - f$ Coſ. $X\sqrt{[1-yy]}$. *Ce Q. F. Tr.*

COROLL. I.

26. Donc ſi on ſuppoſe que la ligne Cp change infiniment peu de poſition, enſorte que ſa projection au

lieu d'être Ce ſoit Ce' (Fig. 19), que q' ſoit la projection du point C', l'angle eCe' étant infiniment petit, & γ' la projection du point G, (Fig. 18) la ligne $C'V'$ reſtant toujours parallele au plan ZEe, il eſt évident qu'on aura 1°. $\gamma'Q'$ (Fig. 19) $= f$ Sin. X; 2°. la diſtance du point G (Figure 18) au plan de projection, $= (a-b)\sqrt{[1-y'y']} + fy'$ Cof. X, y' étant ce que devient y lorſque Cp change de poſition. 3°. CQ' (Fig. 19) $= (a-b)y' - f$ Cof. $X\sqrt{[1-y'y']}$; donc en faiſant $y' = y + dy$, la diſtance du point G (Fig. 18) au plan EZz, ſera $(a-b)\sqrt{[1-yy]} - \frac{ydy(a-b)}{\sqrt{[1-yy]}} + fy$ Cof. $X + fdy$ Cof. X, & CQ' (Fig. 19) $= (a-b) \times y + (a-b)dy - f$ Cof. $X\sqrt{[1-yy]} + \frac{fydy \text{ Cof. } X}{\sqrt{[1-yy]}}$.

COROLL. II.

27. Si on mene par les points, γ, γ' des paralleles $\gamma v'$, $\gamma'V'$ à Cq', & qu'on prolonge $Q'\gamma'$ juſqu'en i, il ſera facile de trouver l'expreſſion analytique des lignes γi, $\gamma' i$. Car en premier lieu, nommant l'angle eCe', de, on aura $qR = Cq \times de = de(a-b)y$, $Vv = \gamma V \times de = f \times$ Cof. $X\sqrt{[1-yy]} \times de$. Donc Rv ou $q'v'$ qui eſt cenſée lui être égale, parce qu'elle n'en différe que d'un infiniment petit du ſecond ordre, eſt $ydе(a-b) + f \times$ Sin. $X - fde$ Cof. $X\sqrt{[1-yy]}$: or $q'V'$ ou $Rl = f \times$ Sin. X; donc lv ou $\gamma' i = ydе(a-b) - fde$ Cof. $X \times \sqrt{[1-yy]}$. En ſecond lieu, menant Rt parallele à

Mq', on aura $\gamma v' = \gamma v + vv' = \gamma V + ut + Rq' = f \times$ Cos. $X V[1 - yy] + f$ Sin. $X \times ds + dy\,(a - b)$; donc puiſque $\gamma' V' = f$ Cos. $X V[1 - y'y']$, ou $f \times$ Cos. $X V[1 - yy] - \frac{fy\,dy\,\text{Cos. } X}{V[1-yy]}$, on aura $\gamma i = (a - b) \times dy + fds$ Sin. $X + \frac{fy\,dy\,\text{Cos. } X}{V[1-yy]}$. *Ce Q. F. Tr.*

COROLL. III.

28. Suppoſons préſentement, que lorſque l'Axe Cp eſt arrivé dans ſa nouvelle poſition où il a Cq' pour projection, & où γ' eſt la projection du point G (Fig. 19) le cercle $KC'G$ perpendiculaire à Cp (Fig. 18) ſe meuve autour de cet Axe d'un mouvement angulaire, tel que tous les points de ſa circonférence parcourent un angle dP; il eſt évident que le point G avancera ſuivant GH de la quantité fdP, & que la projection de ce point G qui étoit en γ' (Fig. 20), ſe trouvera en un point γ'' tel que $\gamma''i' = fdP$ Cos. X, & $\gamma' i' = fdP$ Sin. $X \times V[1 - yy]$. Donc $\gamma i'' = \frac{f\,\text{Cos. } X \,.\, ydy}{V[1-yy]} + (a - b)\,dy + fds$ Sin. $X + fdP$ Sin. $X\,V[1 - yy]$, & $\gamma'' i'' = -yds\,(a - b) + fds$ Cos. $X\,V[1 - yy] + fdP \times$ Cos. X.

COROLL. IV.

29. Lorſque le point γ eſt parvenu en γ', la diſtance du point γ' au point dont il eſt la projection, eſt (*art.* 26).

$(a-b)\sqrt{[1-y'y']}+fy'$ Cos. X ; mais lorsque le γ' est parvenu en γ'', l'angle X est augmenté de la quantité dP, & par conséquent Cos. X devient Cos. $X-dP$ Sin. X; donc tandis que le point γ parvient de γ en γ'', sa distance au point dont il est la projection devient $(a-b)\sqrt{[1-yy]}+fy$ Cos. $X-\frac{(a-b)ydy}{\sqrt{[1-yy]}}+fdy\times$ Cos. $X-fydP$ Sin. X.

Coroll. V.

30. Supposons donc que pendant l'instant dt le point q (Fig. 20) vienne en q', & le point γ' en γ'', il est clair que le point G dont les points γ, γ'' sont successivement la projection, parcourt durant l'instant dt, l'espace fdy Cos. $X-fydP$ Sin. $X-\frac{ydy(a-b)}{\sqrt{[1-yy]}}$ perpendiculairement au plan de projection, & qu'il tend à s'éloigner de ce plan, de cette quantité ; que de plus, il parcourt l'espace $\gamma i''=\frac{fydy\text{ Cos. }X}{\sqrt{[1-yy]}}+(a-b)dy+fdt\times$ Sin. $X+fdP$ Sin. $X\sqrt{[1-yy]}$ parallélement à Ce', & l'espace $i''\gamma''=-ydt(a-b)+fdt$ Cos. $X\times\sqrt{[1-yy]}+fdP$ Cos. X perpendiculairement à cette même ligne Ce'.

Coroll. VI.

31. Supposons ensuite que durant un second instant égal au premier dt (Fig. 21) la ligne Ce' parvienne

en Ce'', enſorte que l'angle $e''Ce' = de + ddε$, & que dy devienne $dy + ddy$, & que durant ce même tems le point G (Fig. 18) décrive autour du centre C un angle $= dP + ddP$; il eſt viſible que pendant ce ſecond inſtant, le point G parcourra perpendiculairement au plan de projection, & en s'en éloignant, l'eſpace $fdy \times$ Cof. $X + fddy$ Cof. $X - fdydP$ Sin. $X - fydP \times$ Sin. $X - fdydP$ Sin. $X - fyddP$ Sin. $X - fydP^2 \times$ Cof. $X - (a-b) \times (\frac{ydy}{V[1-yy]}) - (a-b)\, d(\frac{ydy}{V[1-yy]})$; qu'il parcourra parallélement à Ce'' l'eſpace . . . . . $\frac{f \text{ Cof. } X . ydy}{V[1-yy]} - \frac{fdP \text{ Sin. } X . ydy}{V[1-yy]} + f$ Cof. $X\, d(\frac{ydy}{V[1-yy]}) +$ $(a-b)\, dy + (a-b)\, ddy + fdε$ Sin. $X + fddε \times$ Sin. $X + fdεdP$ Cof. $X + fdP$ Sin. $XV[1-yy] +$ $fddP$ Sin. $XV[1-yy] + fdP^2$ Cof. $XV[1-yy] -$ $\frac{fdP . \text{ Sin. } X . ydy}{V[1-yy]}$, & parallélement à Ce'' l'eſpace $-ydε \times$ $(a-b) - dydε\,(a-b) - yddε\,(a-b) + fdε \times$ Cof. $XV[1-yy] + fddε$ Cof. $XV[1-yy] -$ $fdεdP$ Sin. $XV[1-yy] - \frac{fdε \text{ Cof. } X . ydy}{V[1-yy]} + fdP \times$ Cof. $X - fdP^2$ Sin. $X + fddP$ Cof. X.

COROL. VII.

32. Si on mene par les points γ, γ'', les lignes $\gamma\zeta$, $\gamma''\zeta$ paralleles & perpendiculaires à Ce''; il eſt facile de voir que $\gamma\zeta = \gamma i'' - i''u = \gamma i'' - \gamma'' i'' \times dε$, &

que $\gamma''\zeta = \gamma''i'' + u\zeta = \gamma''i'' + \gamma i'' \times dt$. Donc dans le premier inſtant dt la viteſſe du point G paralléle-ment à Ce'', ſera $\frac{fy\,dy\,\text{Cof. } X}{dt\sqrt{[1-yy]}} + \frac{(a-b)\,dy}{dt} + \frac{fdt\,\text{Sin. } X}{dt} + \frac{fdP\,\text{Sin. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt} + \frac{dt^2}{dt} \times y\,(a-b) - \frac{fdt^2\,\text{Cof. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt} - \frac{fdP\,dt\,\text{Cof. } X}{dt}$, & la viteſſe de ce même point perpendi-culairement à Ce'', ſera $-\frac{y\,dt\,(a-b)}{dt} + \frac{fdt\,\text{Cof. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt} + \frac{fdP\,\text{Cof. } X}{dt} + \frac{fdt\,\text{Cof. } X.\,y\,dy}{dt\sqrt{[1-yy]}} + \frac{dy\,dt\,(a-b)}{dt} + \frac{fdt^2\,\text{Sin. } X}{dt} + \frac{fdP\,dt\,\text{Sin. } X\sqrt{[1-yy]}}{dt}$.

LEMME III.

33. *Soit une verge* PCp (Fig. 18) *de longueur donnée, & fixe en ſon point de milieu* C, *je dis que pour trouver le mouvement de cette verge autour du centre* C, *il ſuffit de trouver le mouvement de ſa projection* Ce *ſur un plan de poſition donnée* EZz.

Car connoiſſant à chaque inſtant la poſition de la ligne Ce, & ſa grandeur, on aura facilement la poſition du point p, puiſque $pe = \sqrt{[Cp^2 - Ce^2]}$. Donc &c.

COROLLAIRE I.

34. Si on ſuppoſe que PCp ſoit l'Axe d'un corps de figure quelconque, dont C ſoit le centre de gravité, & que

que $KC'V$ ſoit la coupe de ce corps par un plan perpendiculaire à ſon Axe, ou une partie de cette coupe, KC' ſe trouvant dans le plan $E'Cpe$; il eſt certain que quelque mouvement qu'on donne à la verge PCp, la ſituation du plan $K'CV$ ſera toujours déterminée, dès qu'on aura la poſition du point C' & de la ligne PCp, puiſque ce plan $KC'V$ eſt toujours perpendiculaire à l'Axe PCp. Mais la poſition des différens points du plan $KC'V$ ne ſera pas déterminée pour cela. En effet, il peut arriver de deux choſes l'une, ou que la ligne KC' ſe trouve toujours dans le plan qui joint la ligne fixe $E'C$, & la verge PCp, & qui change à chaque inſtant de poſition par le mouvement de la verge, ou que la ligne KC' ne s'y trouve pas, & que par conſéquent $C'H$ ne demeure pas parallele au plan EZz. Dans le premier cas, dès que la poſition de la ligne Cp ſera donnée, on connoîtra celle du point K, & par conſéquent de tous les autres points du corps. Dans le ſecond cas, il faut ſçavoir de plus l'angle que fait la ligne KC' qui étoit dans le plan $E'Cp$ au premier inſtant avec celle qui ſe trouve dans ce même plan, lorſqu'il a changé de ſituation. Or comme toutes les parties du corps conſervent toujours la même poſition les unes par rapport aux autres, il s'enſuit que cet angle eſt celui que décrit autour de l'Axe PCp un plan quelconque paſſant par cet Axe, ou que décrit autour du centre C' un point quelconque G. Donc pour avoir la ſituation de toutes les parties du corps à chaque inſtant, il ſuffit de connoî-

tre 1°. la ſituation & la grandeur de la projection Ce de l'Axe Cp, ce qui renferme deux indéterminées. 2°. l'angle que décrit à chaque inſtant un point quelconque G autour du centre C', angle que nous avons nommé dP, & qui ſeroit $= 0$, ſi la ligne KC' demeuroit toujours dans le plan $E'Cp$, ou ce qui eſt la même choſe, ſi la ligne $C'H$ demeuroit toujours parallele au plan EZz.

COROLL. II.

35. Donc ſi on appelle ds l'angle que décrit la ligne Ce à chaque inſtant dt, qu'on faſſe $Cp = 1$, $Ce = y$, & qu'enfin on nomme dP l'angle de rotation du point G autour de C', comme ci-deſſus; la connoiſſance du mouvement du corps autour de ſon centre à chaque inſtant dépendra de celle des trois indéterminées & variables, y, ds, dP.

COROLL. III.

36. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici, que le centre C étoit fixe ; mais s'il avoit quelque mouvement, il eſt clair que ce mouvement ne changeroit rien à celui des parties du corps par rapport au centre C, puiſque le mouvement de ce point, ne feroit que tranſporter toutes les parties du corps, ſuivant des lignes paralleles & égales à celle que décrit le centre C. Or quelle que ſoit la viteſſe & la direction imprimée à chaque inſtant au centre C, on peut toujours la décompoſer en deux

autres, dont l'une ſoit perpendiculaire au plan EZz, l'autre ſoit dans ce même plan, & cette derniere peut de rechef ſe décompoſer en deux autres, l'une ſuivant Ce, l'autre perpendiculaire à Ce ; forces dont la direction change à chaque inſtant, puiſque Ce change à chaque inſtant de poſition. Ainſi la connoiſſance du mouvement inſtantané du centre C dépend de la détermination de trois nouvelles variables.

LEMME IV.

37. *Soit un corps qui ſe meuve d'un mouvement quelconque, & dont toutes les parties aient chacune une viteſſe différente repréſentée par l'indéterminée* u *dans un inſtant quelconque : ſoient auſſi tant de forces accélératrices qu'on voudra*, Ψ, Ψ', &c. *qui agiſſent ſur ce corps, & en vertu deſquelles la viteſſe* u *que chaque partie a dans un inſtant quelconque, ſoit changée l'inſtant ſuivant en une autre viteſſe* u', *différente pour chaque partie. Je dis que ſi on regarde la viteſſe* u *comme compoſée de la viteſſe* u' *& d'une autre viteſſe* u'', *qui eſt infiniment petite ; le ſyſtême de toutes les parties du corps, animées chacune de la viteſſe* u'' *doit être en équilibre avec les forces* Ψ, Ψ', &c.

Cette propoſition n'eſt autre choſe que le principe général, dont j'ai déduit dans mon *Traité de Dynamique* la ſolution de tous les Problêmes qui appartiennent à cette ſcience. On peut en voir la démonſtration Ch. 1. de la ſeconde partie de cet Ouvrage ; mais afin qu'on

ne ſoit pas obligé d'y avoir recours, je la rappellerai ici en peu de mots.

Dans l'inſtant où la viteſſe u, ſe change en la viteſſe u', & où chaque particule eſt animée par les forces Ψ, Ψ', &c. qui tendent à lui donner les viteſſes Ψdt, $\Psi' dt$; on peut regarder cette particule comme tendante à ſe mouvoir avec les viteſſes $u', u'', \Psi dt, \Psi' dt$, ſuivant différentes directions. Or (*hyp.*) elle ne prend réellement de toutes ces viteſſes, que la ſeule viteſſe u'. Donc il faut que les viteſſes $u'', \Psi dt, \Psi' dt$ qui animent chaque partie, ſoient telles, qu'il n'en réſulte aucun mouvement. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

38. Si un corps tourne autour de ſon centre de gravité C de la maniére qu'il a été expliqué dans l'*art.* 34, & qu'en même tems ce centre décrive une ligne quelconque, il eſt certain que la viteſſe inſtantanée de chaque particule ſera compoſée de deux viteſſes; l'une qui ſera égale & parallele à celle du centre C, l'autre qui ſera la viteſſe de rotation de cette partie autour du même centre. Donc ſi on appelle v la viteſſe du centre C dans un inſtant quelconque, v' ſa viteſſe dans l'inſtant ſuivant, n la viteſſe indéterminée de rotation de chaque particule autour du centre C dans le premier de ces deux inſtans, n' ſa viteſſe de rotation dans l'inſtant ſuivant, & qu'on regarde la viteſſe v comme compoſée des viteſſes v', v'', & la viteſſe n comme compoſée des viteſſes

n', n'', il faudra que le ſyſtême de toutes les particules animées chacune de la viteſſe n'', & d'une viteſſe égale & parallele à la viteſſe v'' ſoit en équilibre avec les forces Ψ, Ψ', &c.

COROLL. II.

39. Soit Cp l'Axe du corps, & Ce (Fig. 21), Ce', Ce'' les poſitions ſucceſſives de la projection de l'Axe au commencement d'un inſtant quelconque dt, à la fin de cet inſtant, & à la fin du ſuivant; la viteſſe v'' peut être décompoſée en trois autres, la premiere perpendiculaire au plan EZz, la ſeconde perpendiculaire à Ce'', la troiſiéme parallelle à Ce''; & chacune de ces viteſſes peut être exprimée par $\Pi' dt$, $F' dt$, $G' dt$: de même on peut décompoſer la viteſſe n, & la viteſſe n' chacune en trois autres; ſçavoir α, α', paralleles à Ce'', β, & β', paralleles à la perpendiculaire ſur Ce'', menée dans le plan EZz, & ω, ω' perpendiculaires au plan EZz; d'où il s'enſuit que la viteſſe n'' eſt compoſée des viteſſes $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, & $\omega - \omega'$. Donc le ſyſtême de toutes les particules du corps, animées chacune des viteſſes $\Pi' dt$, $F' dt$, $G' dt$, & $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\omega - \omega'$ doit être en équilibre avec les forces Ψ, Ψ', &c.

COROLL. III.

40. Soit nommée μ' chaque particule du corps; il eſt certain 1°. que les forces Π' & $\frac{\alpha' - \alpha}{dt}$ qui animent

qui agiſſent ſur des points a, a' placés dans le plan $E'C\zeta$, l'une pour tirer le point a' ſuivant $a'd'$, perpendiculairement à $\zeta\zeta'$, l'autre pour tirer les points a, a' ſuivant des lignes paralleles au plan $e''\zeta\zeta'$, ſoit que ces lignes ſoient paralleles entr'elles ou non; on aura, en conſervant les noms de l'*art.* 23 *& ſuiv.* la loi d'équilibre entre ces puiſſances, renfermées dans les ſix équations de l'*art.* 24, qu'il eſt inutile de répéter ici.

COROLL. V.

42. Soit $\alpha'' = \alpha - \alpha'$, $\beta'' = \beta - \beta'$, $\omega'' = \omega - \omega'$, π la diſtance de chaque particule au plan $e''\zeta\zeta'$, ϖ ſa diſtance au plan $E'Ce''$, ϱ' ſa diſtance au plan $E'C\zeta'$, on aura par les principes de ſtatique, ...

$$G \cdot \xi = \int \mu' \times G' \times \pi + \int \frac{\mu'\alpha''\pi}{dt}$$

$$G \cdot \chi = \int \mu' \times G' \times \varpi + \int \frac{\mu'\alpha''\varpi}{dt}$$

$$F \cdot \zeta = \int \mu' \times F' \times \pi + \int \frac{\mu'\beta''\pi}{dt}$$

$$F \cdot \theta = \int \mu' \times F' \times \varrho' + \int \frac{\mu'\beta''\varrho'}{dt}$$

$$\Pi \cdot \nu = \int \mu' \times \Pi' \times \varrho' + \int \frac{\mu'\omega''\varrho'}{dt}$$

$$\Pi \cdot \mu = \int \mu' \times \Pi' \times \varpi + \int \frac{\mu'\omega''\varpi}{dt}$$

Or par la propriété du centre de gravité, $\int \mu'\pi = 0$, $\int \mu'\varpi = 0$, $\int \mu'\varrho = 0$. Donc puiſque les forces G', F', Π'

ſont les mêmes dans chaque particule, il s'enſuit que l'on aura $G.\xi = \int \frac{\mu' u'' \pi}{dt}$; $G.\chi = \int \frac{\mu' u'' \pi}{dt}$, $F.\zeta = \int \frac{\mu' \beta'' \pi}{dt}$; $F.\theta = \int \frac{\mu' \beta'' \xi'}{dt}$, $\Pi.\nu = \int \frac{\mu' u'' \xi'}{dt}$; $\Pi.\mu = \int \frac{\mu' u'' \pi}{dt}$. Donc mettant ces valeurs de $G.\xi$, $G.\chi$, &c. dans les équations B, C, F de l'*art.* 24, elles ſe changeront en celles-ci :

$$\int \frac{\mu' u'' \pi}{dt} - \int \frac{\mu' u'' \xi'}{dt} = \Psi \text{ Cof. } v.L\sqrt{[1-yy]} + \Psi'' \text{ Cof. } v' \times L'\sqrt{[1-yy]} - \Psi'' Lpy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

$$\int \frac{\mu' \beta' \xi'}{dt} - \int \frac{\mu' u'' \pi}{dt} = \Psi Ly \text{ Sin. } v + \Psi'.L'y \text{ Sin. } v' \quad . \quad . \quad (H)$$

$$\int \frac{\mu' \beta'' \pi}{dt} - \int \frac{\mu' u'' \pi}{dt} = \Psi . L . \text{ Sin. } v . \sqrt{[1-yy]} + \Psi'' \times L' \text{ Sin. } v' . \sqrt{[1-yy]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K)$$

& les trois autres équations ſeront . . . . . .

$$\Psi \text{ Cof. } v + \Psi'' \text{ Cof. } v' = M \times G' + \int \frac{\mu' u''}{dt} \quad . \quad . \quad (L)$$

$$\Psi'' p = M \times \Pi' + \int \frac{\mu' u''}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

$$\Psi \text{ Sin. } v + \Psi'' \text{ Sin. } v' = M \times F' + \int \frac{\mu' \beta''}{dt} . \quad . \quad . \quad (N)$$

CHAPITRE

CHAPITRE III.

Solution du Problême de la préceſſion des Equinoxes.

PROBLÊME V.

43. *LA terre étant ſuppoſée un Sphéroide homogene ſolide & peu applati, formé par la révolution d'une Ellipſe autour de ſon petit Axe, on demande le mouvement que doit produire dans ce Sphéroide, l'action du Soleil & de la Lune ſur la croute ou double Ménisque, qui eſt la différence du Sphéroide & du globe inſcrit.*

Solution. On aura d'abord par l'*art.* 11, $\Psi . L = \frac{4a^5}{15} \times \frac{3S\alpha \text{ Cof. } V \times 4D}{a^3} =$ (*art.* 15) $\frac{4a^5 . 3S\alpha\gamma \text{ Cof. } v . 4D}{15\, a^3}$; & $\Psi . ''L' =$ (*art.* 19) $= \frac{\Psi' . L'}{\nu [1 + pp]}$, c'eſt-à-dire, en négligeant le quarré de la quantité très-petite pp, $\Psi'' . L' = \Psi' . L' =$ (*art.* 14) $\frac{4a^5}{15} \times \frac{3\lambda\alpha \text{ Cof. } V' \times 4D}{a'^3} = \frac{4a^5 . 3\lambda\alpha\gamma \text{ Cof. } v'}{15\, a'^3} \times 4D +$ $\frac{4a^5 . 3\lambda\alpha p \sqrt{[1 - \gamma\gamma]} . 4D}{15\, a'^3}$ (*art.* 15).

En ſecond lieu, ſi on conſerve les mêmes noms que dans l'*article* 40, on aura $\mu' = db \times fdX \times df$, df, exprimant la largeur infiniment petite $G'g$ de la couronne $KGQK$ (Fig. 2); enfin, on aura ſuivant l'*art.* 42 & l'*art.* 29, $\pi = \gamma' f$ Cof. $(X + dP) + (a - b) \times$

$\sqrt{[1-y'y']}$, ou ce qui revient au même ici, $yf \times$ Cof. $X + (a-b)\sqrt{[1-yy]}$, parce que π doit être multiplié par la quantité infiniment petite μ'; par la même raiſon $\varpi = f$ Sin. X, & $\varrho' = (a-b)\,y - f$ Cof. $X \times \sqrt{[1-yy]}$; enfin ſuivant les *articles* 31, 32 & 42, on trouvera $dt\,(\alpha - \alpha')$ ou $\alpha''\,dt = -f$ Cof. $X \times d\left(\frac{y\,dy}{\sqrt{[1-yy]}}\right) + \frac{f\,dP \cdot y\,dy\ \text{Sin. } X}{\sqrt{[1-yy]}} - ddy\,(a-b) - fdd\varepsilon \times$ Sin. $X - fd\varepsilon\,dP$ Cof. $X - fddP$ Sin. $X\sqrt{[1-yy]} - fdP^2$ Cof. $X\sqrt{[1-yy]} + \frac{f.\text{Sin. } X.\,dP.\,y\,dy}{\sqrt{[1-yy]}} + y\,d\varepsilon^2 \times (a-b) - fd\varepsilon^2$ Cof. $X\sqrt{[1-yy]} - fdP\,d\varepsilon$ Cof. X; $dt\,(\beta-\beta')$ ou $\beta''\,dt = \frac{2fd\varepsilon \cdot y\,dy \cdot \text{Cof. } X}{\sqrt{[1-yy]}} + dy\,d\varepsilon\,(a-b) + fd\varepsilon^2$ Sin. $X + fdP\,d\varepsilon$ Sin. $X\sqrt{[1-yy]} + y\,dd\varepsilon \times (a-b) + d\varepsilon\,dy\,(a-b) - fdd\varepsilon$ Cof. $X\sqrt{[1-yy]} + fd\varepsilon\,dP$ Sin. $X\sqrt{[1-yy]} - fddP$ Cof. $X + fdP^2 \times$ Sin. X: enfin, $dt\,(\omega-\omega')$, ou $\omega''\,dt = -fddy$ Cof. $X + 2fdy\,dP$ Sin. $X + fy\,ddP$ Sin. $X + (a-b) \times d\left(\frac{y\,dy}{\sqrt{[1-yy]}}\right) + fy\,dP^2$ Cof. X.

On ſubſtituera maintenant toutes ces valeurs dans les ſix équations de l'*article* 42; mais on pourra abréger le calcul par les remarques ſuivantes.

1°. On rejettera dans les différentielles $\mu'\alpha''\pi$, $\mu'\alpha''\varpi$, &c. tous les termes qui renferment des Sin. ou Coſin. de X ou de $2X$, par la raiſon que l'intégrale de ces termes, lorſque $X = 4$ droits, eſt $= 0$, comme on l'a

vû dans l'*art.* 7. De cette maniére, on aura . . . .

$$\int\mu'\alpha''\pi = \int(fdfdXdb)\times\left(\frac{ff}{2}\right)\times[-yd\left(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}\right)-$$
$$2ydsdP-ydP^2\sqrt{[1-yy]}-yds^2\sqrt{[1-yy]}]+$$
$$\int fdfdXdb\times(a-b)^2\times(-ddy\sqrt{[1-yy]}+yds^2\times$$
$$\sqrt{[1-yy]}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\int\mu'\alpha''\varpi = \int fdfdXdb\times\frac{ff}{2}\times\left(\frac{2ydydP}{\sqrt{[1-yy]}}-ddsdP\times\right.$$
$$\left.\sqrt{[1-yy]}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\int\mu'\omega''\varsigma' = \int fdfdXdb\times\frac{ff}{2}\times(ddy\sqrt{[1-yy]}-ydP^2\times$$
$$\sqrt{[1-yy]})+\int fdfdXdb\times(a-b)^2\times\left(yd\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}\right);$$
$$\int\mu'\omega''\varpi = \int fdfdXdb\times\frac{ff}{2}\times(2dydP+yddP);$$
$$\int\mu'\beta''\varsigma' = \int fdfdXdb\times(a-b)^2\times(2ydyds+yyddsdP)+$$
$$\int fdfdXdb\times\frac{ff}{2}\times(-2ydyds+(1-yy)ddsdP+$$
$$ddP\sqrt{[1-yy]}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\int\mu'\beta''\pi = \int fdfdXdb\times\frac{ff}{2}\times\left(\frac{2yydydsdP}{\sqrt{[1-yy]}}-yddsdP\times\right.$$
$$\left.\sqrt{[1-yy]}-yddP\right)+\int fdfdXdb\times(a-b)^2\times$$
$$(2dydsdP\sqrt{[1-yy]}+yddsdP\sqrt{[1-yy]}).$$

Or afin de ſubſtituer plus aiſément ces valeurs dans les équations de l'*article* 42, on remarquera que pour avoir $\int fdfdXdb\times\frac{ff}{2}$, il faut prendre d'abord l'intégrale de $dfdb\times\frac{f^3}{2}dX$, en regardant df & db com-

me conſtantes, ce qui donnera $dfdb \times f^3 \times 2D$, dont l'intégrale en regardant db comme conſtante, eſt $\frac{f^4 D \times db}{2}$. Or $f^2 = (2ab - bb) \times (1+\alpha)^2$ (*article* 9); donc $\int \frac{db \times Df^4}{2} = \frac{D(1+\alpha)^4}{2} \times \int db\,[aa-(a-b)^2]^2 =$ $(1+\alpha)^4 \times [\frac{Da^4 b}{2} + \frac{Daa(a-b)^3}{3} - \frac{Da^5}{3} - \frac{D}{2}\frac{(a-b)^5}{5} +$ $\frac{Da^5}{2.5}] =$ lorſque $b = 2a$, à $\frac{4a^5}{15} \times 2D \times (1 + 4\alpha + 6\alpha\alpha +$ $4\alpha^3 + \alpha^4)$. On trouvera de même $\int\!\!\int df dX db\,(a-b)^2 =$ $\int db\,(a-b)^2 \times ff \times 2D = \int db\,(a-b)^2 \times 4D \times$ $(1+\alpha)^2 \times [\frac{aa-(a-b)^2}{2}] =$ lorſque $b = 2a$, $\frac{4a^5}{15} \times$ $2D \times (1 + 2\alpha + \alpha\alpha)$. Donc négligeant les termes qui renferment le quarré de α, & les puiſſances plus hautes, on aura au lieu des équations G, H, K, de l'*article* 42, les trois ſuivantes . . . . . .

$$\frac{6S\alpha y dt^2 \text{ Cof. } v^2 \sqrt{[1-yy]}}{u^3} + \frac{6\lambda\alpha y dt^2 \text{ Cof. } v'^2 \sqrt{[1-yy]}}{u'^3} +$$

$$(\frac{6\lambda\alpha p \text{ Cof. } v'(1-yy)}{u'^3} - \frac{6\lambda\alpha pyy \text{ Cof. } v'}{u'^3})\, dt^2 = (2+6\alpha) \times$$

$$[-yd(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}) - ddy\sqrt{[1-yy]}] + (1+4\alpha) \times$$

$$+ 2yd\epsilon dP - 2\alpha \times yd\epsilon^2 \sqrt{[1-yy]} \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

$$\frac{\frac{1}{2}S\alpha yy dt^2 \text{ Sin. } 2v}{u^3} + \frac{3\lambda\alpha yy dt^2 \text{ Sin. } 2v''}{u'^3} + \frac{6\lambda\alpha y dt^2 p \text{ Sin. } v'\sqrt{[1-yy]}}{u'^3} =$$

$$- 2\alpha d(yyd\epsilon) + 2(1+4\alpha)(dd\epsilon + ddP \times$$

$\sqrt{[1-yy]} - \frac{ydydP}{\sqrt{[1-yy]}}) \ldots\ldots\ldots (Q)$

$\frac{3S\alpha y ds^2 \text{ Sin. } 2v\sqrt{[1-yy]}}{u^3} + \frac{3\lambda\alpha y ds^2 \text{ Sin. } 2v'\sqrt{[1-yy]}}{u'^3} +$

$\frac{6\lambda\alpha p ds \text{ Sin. } v' \times [1-yy]}{u'^3} = 2(1+4\alpha) \times (\frac{yydyds}{\sqrt{[1-yy]}}) -$

$yddP - dydP) - 2\alpha \times (ydds\sqrt{[1-yy]}) +$
$(1+2\alpha) \times 2dsdy\sqrt{[1-yy]} \ldots\ldots (R)$

Si on multiplie la seconde de ces équations par $\frac{\sqrt{[1-yy]}}{y}$, & qu'on la compare ensuite à la troisiéme, il viendra $-2\alpha d(yyds) \times \frac{\sqrt{[1-yy]}}{y} + \frac{2\sqrt{[1-yy]}}{y} \times (1+4\alpha) \times$

$[dds + ddP\sqrt{[1-yy]} - \frac{ydydP}{\sqrt{[1-yy]}} = 2(1+4\alpha) \times$

$[\frac{yydyds}{\sqrt{[1-yy]}} - yddP - dydP] - 2\alpha \times ydds\sqrt{[1-yy]} +$
$(1+2\alpha) \times (2dsdy\sqrt{[1-yy]})$ qui se réduit à $-$
$4\alpha dyds\sqrt{[1-yy]} - 2\alpha ydds\sqrt{[1-yy]} +$
$\frac{2ddy\sqrt{[1-yy]}}{y} + \frac{8\alpha ddy\sqrt{[1-yy]}}{y} + 2(1+4\alpha) \times$

$(\frac{ddP}{y} - yddP - dydP) = 2(1+4\alpha) \times (\frac{yydyds}{\sqrt{[1-yy]}} -$
$yddP - dydP) - 2\alpha ydds\sqrt{[1-yy]} + (1+2\alpha) \times$
$2dsdy\sqrt{[1-yy]}$. D'où l'on tire $2(1+4\alpha)\frac{ddP}{y} =$

$2dsdy\sqrt{[1-yy]} + \frac{2yydyds}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{2ddy\sqrt{[1-yy]}}{y} +$

$\frac{8yydyde.\alpha}{V[1-yy]} + 8\alpha de dy V[1-yy] - \frac{8\alpha ddeV[1-yy]}{g} =$

$2(1+4\alpha)\frac{dyde}{V[1-yy]} + 2(1+4\alpha) \times -\frac{ddeV[1-yy]}{g}$;

ou enfin $ddP = -ddeV[1-yy] + \frac{ydyde}{V[1-yy]}$; dont l'intégrale eſt $dP = -deV[1-yy]$ + une conſtante infiniment petite dZ.

Cette conſtante dZ eſt évidemment proportionnelle au tems dt qui eſt ſuppoſé conſtant; donc ſi on ſuppoſe que la terre ſe meuve d'un mouvement uniforme autour du Soleil, & que durant le tems dt elle parcoure l'angle dz, on pourra ſuppoſer $dZ = kdz$, k exprimant une conſtante indéterminée. Donc $dP = de \times V[1-yy] + kdz$: il faut donc ſubſtituer cette valeur de dP dans les deux équations P & Q; mais avant de faire cette ſubſtitution, on remarquera 1°. que ſi on appelle g la viteſſe de la Terre autour du Soleil à la diſtance u que l'on regarde comme conſtante, on aura $dt = \frac{udz}{g}$; que de plus, gg eſt à très-peu près égal à $\frac{S}{u^2} \times u$, parce que l'orbite de la terre différe peu d'un cercle; d'où il s'enſuit, que $dt^2 = \frac{u^2dz^2}{S} \times u$. Donc $\frac{Sdt^2}{u^3} = dz^2$; 2°. que $\frac{\lambda dt^2}{u'^3} = \frac{\lambda}{u'^3} \times \frac{u^3}{S} \times \frac{Sdt^2}{u^3} = \frac{\lambda}{u'^3} \times \frac{u^3}{S} \times dz^2$: donc ſi on fait $\frac{\lambda}{u'^3} \times \frac{u^3}{S} = 1 + 6$, on aura $\frac{\lambda dt^2}{u'^3} =$

$(1+6)\,dz^2$; 3°. que ſi on appelle m' la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, & ζ le Sinus de la diſtance du lieu de la Lune dans l'Ecliptique, au nœud aſcendant, on aura $p = -m'\zeta$; je mets $p = -m'\zeta$, parce que nous avons ſuppoſé que la Lune étoit au-deſſous du plan de l'Ecliptique, d'où il s'enſuit que le Sinus ζ de ſa diſtance au nœud aſcendant eſt négatif, parce que cette diſtance eſt plus grande que 180° ; or la quantité p a été ſuppoſée poſitive dans le calcul ; il faut donc faire $p = -m'\zeta$, afin que $-m'\zeta$ ſoit auſſi poſitif ; 4°. que $-yd\left(\frac{ydy}{\sqrt{[1-yy]}}\right) - ddy\sqrt{[1-yy]} = -\frac{ddy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{ydy^2}{(1-yy)^{\frac{3}{2}}}$: donc la premiere équation (P) deviendra . . . . . .

$3ydz^2 . \alpha$ Cof. $v^2\sqrt{[1-yy]} + 3y\alpha dz^2(1+6) \times$ Cof. $v'^2 \times \sqrt{[1-yy]} - 3\alpha(1+6)$ Cof. $v' . m'\zeta \times (1-2yy)\,dz^2 = (1+3\alpha) \times \left(-\frac{ddy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{ydy^2}{(1-yy)^{\frac{3}{2}}}\right) + (1+3\alpha)\,yds^2\sqrt{[1-yy]} + (1+4\alpha) \times -kyds\,dz$: or on remarquera dans cette équation, que $-\frac{ddy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{ydy^2}{(1-yy)^{\frac{3}{2}}}$, eſt la différence de $-\frac{dy}{\sqrt{[1-yy]}}$, & comme y eſt le Coſinus de l'angle que l'Axe de la terre fait avec le plan de l'Ecliptique, il s'enſuit que ſi on appelle π cet angle, on aura $d\pi = \frac{-dy}{\sqrt{[1-yy]}}$; $dd\pi = \frac{-ddy}{\sqrt{[1-yy]}} -$

$-\frac{y\,dy^2}{(1-yy)^{\frac{1}{2}}}$; $y = \text{Cof. } \pi$; $\sqrt{[1-yy]} = \text{Sin. } \pi$. Donc l'équation précedente ſe changera en . . . . .

$$dd\pi = \frac{3\alpha\ \text{Cof. } v^2\ \text{Sin. } \pi\ .\ \text{Cof. } \pi \times dz^2}{1+3\alpha}$$

$$+\ \frac{3\alpha\,dz^2\ (1+6)\ \text{Cof. } v'^2\ \text{Sin. } \pi\ .\ \text{Cof. } \pi}{1+3\alpha}$$

$$-\ \frac{3\alpha\,dz^2\ (1+6)\ m'\zeta\ \text{Cof. } v'\ (1-2\,[\text{Cof. } \pi]^2)}{1+3\alpha}$$

$$-\,d\varepsilon^2\ \text{Sin. } \pi\ \text{Cof. } \pi + \left(\frac{2+4\alpha}{1+3\alpha}\right) k\,d\varepsilon\,dz\ \text{Cof. } \pi \quad \ldots \quad (S)$$

On changera de même l'équation Q en celle-ci :

$$\frac{3\alpha\,dz^2\ \text{Sin. } 2v\ .\ \text{Cof. } \pi^2}{2\,(1+3\alpha)} + \frac{3\alpha\,(1+6)\ \text{Sin. } 2v'\ .\ \text{Cof. } \pi^2\ .\ dz^2}{2\,(1+3\alpha)}$$

$$-\ \frac{3\alpha\,(1+6)\,dz^2\ \text{Sin. } v'\ .\ m'\zeta\ .\ \text{Sin. } \pi\ \text{Cof. } \pi}{1+3\alpha} =$$

$$d(d\varepsilon\ \text{Cof. } \pi^2) + \frac{(1+4\alpha)\,d\,(k\,dz\ \text{Sin. } \pi)}{1+3\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$

C'eſt en intégrant ces deux équations, ou abſolument, ou au moins par approximation, que l'on parviendra à déterminer le mouvement de l'Axe de la terre, & à s'aſſurer ſi le Phénomene de la préceſſion des Equinoxes eſt d'accord avec la Théorie Newtonienne. Nous allons entrer dans cette diſcuſſion, après avoir fait quelques remarques qui rendront la ſolution précedente beaucoup plus générale.

Remarque I.

REMARQUE I.

44. Quelle que ſoit la figure de la terre, pourvû qu'elle ſoit compoſée de couches qui ſoient des ſolides de révolution, & qui s'éloignent peu de la figure Sphérique ; on a vû plus haut (*article* 13) que l'on pouvoit toujours au lieu de $\frac{4\alpha a^5}{15}$ ſubſtituer une quantité conſtante très-petite A, qui dépende de la denſité & de la figure des différentes couches. On peut de même ſuppoſer $\int\int df df X db \times \frac{ff}{2} = K \times 2D$, & $\int\int df df X db \times (a-b)^2 = M \times 2D$, K & M étant des conſtantes : on peut donc dans les équations P, Q, R, ſubſtituer A à la place de α, $M - K$ à la place de -2α, K à la place de $1 + 4\alpha$, & M à la place de $1 + 2\alpha$. Or en comparant après cette ſubſtitution les équations R, Q, comme on l'a fait plus haut, on parviendra de même à l'équation . . . . . .

$$2K\,ddP = 2K\left(-dds\sqrt{[1-yy]} + \frac{y\,dy\,ds}{\sqrt{[1-yy]}}\right);$$

d'où l'on tirera comme ci-deſſus $dP = -ds\sqrt{[1-yy]} + k\,dz$; & les équations T, S, ſe changeront en celles-ci, beaucoup plus générales . . . . . .

$$\frac{3A\,dz^2\,\text{Sin. } 2v\,.\,\text{Cof. } \pi^2}{M+K} + \frac{3A(1+\zeta)\,\text{Sin. } 2v'\,.\,\text{Cof. } \pi^2 \times dz^2}{M+K}$$

$$- \frac{6A(1+\zeta)\,dz^2\,\text{Sin. } v'\,.\,m'\zeta\,.\,\text{Sin. } \pi\,\text{Cof. } \pi}{M+K}$$

$$= d(dt\ \text{Cof.}\ \pi^2) + \frac{2K\,d\,(k\,dz\ \text{Sin.}\ \pi)}{M+K} \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

$$\& \; dd\pi = \frac{6A\,dz^2 \times \text{Cof.}\ v^2\ \text{Sin.}\ \pi\ .\ \text{Cof.}\ \pi}{M+K}$$

$$+ \frac{6A\,dz^2\,(1+\zeta)\ \text{Cof.}\ v^2\ \text{Sin.}\ \pi\ .\ \text{Cof.}\ \pi}{M+K}$$

$$- \frac{6A\,dz^2\,(1+\zeta)\,m'\zeta\ \text{Cof.}\ v'\,(1-2\ \text{Cof.}\ \pi^2)}{M+K}$$

$$- dt^2\ \text{Sin.}\ \pi\ \text{Cof.}\ \pi + \left(\frac{2K\ .\ k\,dt\,dz\ \text{Cof.}\ \pi}{M+K}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

REMARQUE II.

45. Il eſt évident que les quantités M, K différent très-peu de ce qu'elles ſeroient, ſi la terre étoit compoſée de couches Sphériques, puiſque (*hyp.*) les couches de la terre ont à peu près cette figure. Suppoſons donc d'abord la terre Sphérique, & d'une denſité homogene ; on verra aiſément (*article* 43) que K ſera $= \frac{4as}{15}$, & que M ſera $= \frac{4as}{15}$, c'eſt-à-dire que M ſera $= K$; donc ſi la terre eſt compoſée de couches Sphériques dont les rayons ſoient f & les denſités Δ, on aura $K = \int \frac{4}{15} \times d\,(f^5) \times \Delta$ ou $\frac{4F'as}{15}$, en nommant $F'a^5$ ce que devient $\int \Delta\, d\,(f^5)$ lorſque $f = a$. Par la même raiſon, on aura $M = \frac{4F'as}{15}$: donc en général $M = K$ lorſque la terre eſt compoſée de cou-

ches Sphériques. Donc lorſque la terre eſt compoſée de couches à peu près Sphériques, on a M à peu près égal à K, & $M + K$ à peu près $= 2K$. Donc les équations V & X deviendront . . . . . .

$$\frac{3A\,dz^2\,\text{Sin.}\,2v\,.\,\text{Cof.}\,\pi^2}{2K} + \frac{3A\,(1+\zeta)\,dz^2\,\text{Sin.}\,2v'\,.\,\text{Cof.}\,\pi^2}{2K}$$

$$- \frac{3A\,(1+\zeta)\,\text{Sin.}\,v'\,.\,m'\zeta\,.\,\text{Cof.}\,\pi\,.\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,dz^2}{K}$$

$$= d\,(ds\,\text{Cof.}\,\pi^2) + d\,(k\,dz\,\text{Sin.}\,\pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Y)$$

$$\&\ dd\pi = \frac{3A\,\text{Cof.}\,v^2\,dz^2\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi}{K}$$

$$+ \frac{3A\,\text{Cof.}\,v'^2\,dz^2\,.\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi \times (1+\zeta)}{K}$$

$$- \frac{3A\,dz^2\,(1+\zeta)\,\text{Cof.}\,v'\,.\,m'\zeta\,.\,(1 - 2\,\text{Cof.}\,\pi^2)}{K}$$

$$- ds^2\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi + k\,ds\,dz\,\text{Cof.}\,\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Z)$$

REMARQUE III.

46. Comme la commune ſection de l'Ecliptique & de l'Equateur eſt toujours perpendiculaire à la projection de l'Axe de la terre ſur le plan de l'Ecliptique, il eſt viſible que l'arc ou l'angle élementaire de la préceſſion des Equinoxes, c'eſt-à-dire l'angle que décrit cette commune ſection de l'Ecliptique & de l'Equateur, eſt égal à ds. De plus, on a (*article 6*) Coſin. $v^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{Cof.}\,2v}{2}$; & de même Coſin. $v'^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{Cof.}\,2v'}{2}$. En-

fin, les obſervations apprennent que le mouvement rétrograde des Equinoxes, eſt à peu près uniforme; deſorte que ſi z exprime l'angle parcouru par la terre durant un tems quelconque, l'angle parcouru par la projection de l'Axe ſera $= Mz$, M exprimant une conſtante très-petite & à peu près égale à la fraction $\frac{50''}{360°} = \frac{1}{6.12.360}$.

Suppoſons donc que quand la terre commence à parcourir l'angle z, c'eſt-à-dire quand $z = 0$, la diſtance du lieu du Soleil à la projection e du Pôle boreal p de la terre (Fig. 18) ſoit $= U$; il eſt clair que lorſque la terre aura parcouru l'angle z, & que la projection p de l'Axe aura parcouru l'angle Mz en ſens contraire, la diſtance du lieu du Soleil au point e ſera $U + z + Mz$; or l'angle v, c'eſt-à-dire l'angle SCE ou la diſtance du lieu du Soleil à l'extrémité E, différe de la précedente de 180 degrés. Donc Sin. $v = -$ Sin. $U + z + Mz$, & Coſ. $v = -$ Coſ. $U + z + Mz$. De même ſoit n le rapport du mouvement angulaire de la Lune à celui de la Terre, rapport qui eſt environ celui de $13\frac{1}{2}$ à 1, & n' le rapport du mouvement des nœuds de la Lune au mouvement de la Terre, lequel eſt environ celui de $\frac{1}{18}$ à 1, on trouvera que le Sinus de $v' = -$ Sin. $U' + nz + Mz$, & Coſ. $v' = -$ Coſ. $U' + nz + Mz$, en prenant U' pour la diſtance entre le point e & le lieu de la Lune dans l'Ecliptique, lorſque $z = 0$.

Enfin ſoit δ la diſtance du lieu Ecliptique de la Lune au nœud aſcendant lorſque $z = 0$, on aura $\zeta = \text{Sin. } \delta + nz + n'z$, & par conſéquent (*art.* 5 & 6)

$$-\zeta \text{ Cof. } v' = \frac{\text{Sin. } \overset{\circ}{v} + \delta + 2nz + n'z + Mz}{2}$$

$$+ \frac{\text{Sin. } -\overset{\circ}{v} + \delta + n'z - Mz}{2}; \text{ \& } -\zeta \text{ Sin. } v' =$$

$$-\frac{\text{Cof. } \overset{\circ}{v} + \delta + 2nz + n'z + Mz}{2} + \frac{\text{Cof. } \delta - \overset{\circ}{v} + n'z - Mz}{2}.$$

REMARQUE IV.

47. Il faut à préſent ſubſtituer toutes ces valeurs dans les équations Y & Z pour les intégrer enſuite ; mais avant de faire cette ſubſtitution & cette intégration, il ne ſera pas inutile de voir ce que les obſervations nous apprennent ſur le mouvement de l'Axe de la terre, pour comparer enſuite d'une maniére plus facile & plus ſenſible les obſervations avec la Théorie.

CHAPITRE IV.

Comparaiſon de la Théorie précedente avec les obſervations.

48. M. *Bradley* vient de publier une lettre écrite à Milord *Macclesfield* le 31 Déc. 1747. ſur la nutation de l'Axe de la terre ; il donne dans cette

lettre le détail d'une ſuite d'obſervations qu'il a faite pendant 20 ans, & deſquelles il réſulte 1°. que l'Axe de la terre eſt ſujet durant une révolution des nœuds de la Lune à une nutation ſenſible qui monte à 18″; 2°. que cette nutation eſt auſſi accompagnée d'une équation dans la préceſſion des Equinoxes. Voici l'hypotheſe qu'il donne d'après M. *Machin*, pour calculer cette nutation & cette équation, hypotheſe avec laquelle il dit que ſes obſervations s'accordent à 2″ près.

49. Soit *P* (Fig. 23) le lieu moyen du Pôle de l'Equateur; *E* le vrai lieu du Pôle de l'Ecliptique, autour duquel le Pôle *P* tourne uniformément en rétrogradant de 50″ par an, ce qui fait la préceſſion moyenne: ſoit *P* ♋ le colure des Solſtices, *P* ♈ celui des Equinoxes. Du point *P* comme centre & d'un rayon égal à 9″ d'un Arc de grand cercle, ſoit décrit un petit cercle *ABCD* dont le vrai Pôle de l'Equateur parcourre la circonférence en 18 ans & 7 mois, par un mouvement rétrograde & correſpondant à celui du nœud de la Lune; enſorte que ce Pôle ſoit en *A* ſur le colure des Solſtices du côté du Cancer, lorſque le nœud aſcendant de la Lune eſt au commencement du ♈; en *B* quand ce nœud eſt dans 0° ♎; & en *C* quand ce nœud eſt dans 0° ♑. Dans ce dernier cas, le Pôle boreal de l'Equateur étant au point du cercle *ABCD* qui eſt le plus près du Pôle boreal de l'Ecliptique, l'obliquité de l'Ecliptique, c'eſt-à-dire l'angle de l'Ecliptique avec l'Equateur doit être moindre de 18″, que quand le nœud

aſcendant de la Lune étoit en ♈. On voit auſſi que le vrai Pôle de l'Equateur en allant de *A* vers *B*, s'approche des étoiles qui paſſent au Méridien, avec le Soleil, aux environs de l'Equinoxe du Printemps, & s'écarte de celles qui paſſent au Méridien avec le Soleil vers l'Equinoxe d'Automne, & qu'en même tems la préceſſion vraie des Equinoxes excéde la moyenne, puiſque le vrai lieu du Pôle en avançant ſur le petit cercle tourne plus vîte autour du Pôle *E* de l'Ecliptique, que le lieu moyen *P*.

REMARQUE I.

50. Par la figure & le diſcours que je viens de rapporter, il eſt difficile de ſavoir ſi le petit cercle *ABCD* que M. *Bradley* fait décrire au Pôle *P* eſt parallele à l'Ecliptique ou à l'Equateur; mais comme l'angle de l'Equateur & de l'Ecliptique n'eſt que de $23\frac{1}{2}^{\circ}$, & que le Coſinus de cet angle ne différe pas de $\frac{1}{10}$ du Sin. total, puiſqu'il eſt égal à $\frac{91706}{100000}$, il eſt aſſez indifférent de ſuppoſer ce petit cercle parallele à l'un ou l'autre des deux grands cercles que je viens de nommer; par exemple, ſi on ſuppoſe le petit cercle *ABCD* parallele à l'Ecliptique, & $AP = 9''$, la variation de l'inclinaiſon au lieu d'être de $18''$, ſera de $18'' \times \frac{100000}{91706} =$ à peu près $20''$. Or M. *Bradley* ne répond pas, comme nous l'avons dit,

qu'il n'y ait deux ſecondes d'erreur dans ſes obſervations.

Je crois donc qu'on peut ſuppoſer le petit cercle *ABCD* parallele au plan de l'Ecliptique, & décrit par le point qui eſt la projection de l'Axe terreſtre, tandis que le centre *P* du petit cercle décrit le cercle *PQRS* Cela poſé, ſoit $n'z$ l'angle que le nœud aſcendant de la Lune décrit en avançant de ♈ vers ♑ contre l'ordre des Signes durant le temps que la ligne *APE* décrit autour de *E* l'angle *Mz* égal à la préceſſion moyenne des Equinoxes ; on voit que le point *O*, dont la viteſſe angulaire autour de *P* eſt la même (*hyp.*) que celle du nœud aſcendant de la Lune, aura décrit dans ce même temps autour de *P* un angle $= n'z$, & que l'angle *APO* ſera $= n'z - Mz$; or ſoit $\pi = \varpi'$ lorſque le nœud eſt en ♈ & le Pôle en *A*, il eſt certain que lorſque la projection ſera en *O*, l'angle ϖ' ſera augmenté d'une quantité $= 9'' \times (\text{Sin. tot.} - \text{Cof. } n'z - Mz) \times$ & que l'angle ϵ ſera augmenté de $\frac{9'' \times \text{Sin. } n'z - Mz \times \text{Sin. } \varpi'}{\text{Cof. } \varpi'}$.

Je ſuppoſerai donc $\pi = \varpi' - Q \text{ Cof. } n'z - Mz + Q$; ϖ' étant un angle conſtant, & Q une conſtante qu'on déterminera par les obſervations, & qui eſt environ $= 9''$; ou, pour n'avoir pas plus d'une conſtante dans l'expreſſion de π, je ſuppoſerai $\pi = \varpi - Q \text{ Cof. } n'z - Mz$; ϖ étant la valeur moyenne de l'angle π, c'eſt-à-dire la valeur de cet angle lorſque le Pôle répond au point *P*, & que le lieu du nœud de la Lune eſt en ♑ ; à l'égard

gard de s, on trouvera facilement par la conſtruction précedente, que $s = Mz + \frac{Q \cdot \text{Sin. } n'z - Mz \cdot \text{Sin. } \varpi}{\text{Col. } \varpi}$. Il faudra donc comparer les valeurs de π & de s qu'on trouvera par l'intégration des deux équations Y, Z avec celles qu'on vient de trouver d'après les calculs de M. *Bradley*.

REMARQUE II.

51. Si au lieu de faire décrire un cercle au point A qui eſt la projection de l'extrémité de l'Axe terreſtre, on en faiſoit décrire un au Pôle même, dont A eſt la projection, & qui eſt l'extrémité réelle de cet Axe; alors $ABCD$ ſeroit une petite Ellipſe dont les Axes AP, PB ſeroient entr'eux comme Sin. ϖ à 1, & faiſant $Q = AP =$ environ 8″, on trouveroit π à peu près $= \varpi - \frac{Q \text{ Cof. } n'z - Mz}{\text{Sin. } \varpi}$, & $s = Mz + \frac{Q \text{ Sin. } n'z - Mz}{\text{Cof. } \varpi}$, ce qui changeroit un peu la valeur des deux équations de l'inclinaiſon & de la préceſſion, ſans en changer le rapport.

Nous allons examiner dans la Remarque ſuivante, ſi ces valeurs de π & de s tirées des obſervations s'accordent avec celles que fournit la Théorie.

REMARQUE III.

52. J'obſerverai d'abord, que dP qui repréſente le mouvement journalier du globe terreſtre, eſt égal (*art.* 43) à $-d.s\sqrt{[1-yy]} + k\,dz$, ou $-d.s \text{ Sin. } \pi +$

kdz; & comme $d\varepsilon$ eſt très-petit par rapport à dz, & qu'au contraire dP doit être très-grand par rapport à dz, c'eſt-à-dire environ $365\frac{1}{4}$ fois plus grand; il s'enſuit que kdz doit être très-grand par rapport à $d\varepsilon$, & qu'on peut regarder $d\varepsilon$ comme nulle par rapport à kdz; de plus, comme nous avons ſuppoſé que la rotation ou le mouvement angulaire dP ſe faiſoit dans le même ſens que $d\varepsilon$, & que c'eſt tout le contraire dans la terre, il eſt viſible que k ſera égal à peu près à $365\frac{1}{4}$, pris négativement: d'où il s'enſuit, que dans l'équation Y on peut effacer le terme $d(d\varepsilon \text{ Cof. } \pi')$ du ſecond membre, puiſque cette quantité eſt comme nulle par rapport à $d(kdz \text{ Sin. } \pi)$. Maintenant, l'équation étant ſous cette forme, il n'y a plus qu'à l'intégrer ſimplement pour avoir la valeur de Sin. π, après avoir fait les ſubſtitutions indiquées dans l'*article* 46; mais il faut remarquer que dans ces intégrations les termes qui contiendront l'angle $n'z - Mz$, ſeront beaucoup plus grands que les autres. Car par l'intégration ces termes auront pour diviſeur la fraction $n' - M =$ environ $\frac{1}{18}$, & comme la quantité m' qui eſt la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire eſt environ $\frac{1}{12}$, il s'enſuit que $\frac{m'}{n'-M}$ qui multipliera dans l'intégrale le coefficient $\frac{3A(1+\delta)}{2K}$, ſera

un nombre à peu près $= \frac{3}{2}$; au contraire, le terme qui contiendra l'angle $2U' + 2nz + 2Mz$, ſera diviſé par $2n$, c'eſt-à-dire par environ 27 ; & le terme qui contiendra $\frac{3A}{2K}$ avec l'angle $2U + 2z + 2Mz$, ſera diviſé par 2 ; de plus $1 + 6$ exprime (*article* 43) le rapport de $\frac{\lambda}{n'^3}$ à $\frac{S}{M^3}$: or ce rapport, ſelon M. *Newton*, eſt égal à 4 ; & nous ferons voir plus bas, qu'il eſt plus grand que 2 ; donc le terme qui aura $\frac{3A}{2K \cdot 2}$ pour coefficient, ſera au terme qui aura $\frac{3A(1+6)}{2K} \times \frac{m'}{n' - M}$ pour coefficient, comme 1 eſt à 6 & même plus. Donc ce terme ſera beaucoup plus petit que celui des trois termes qui contient l'angle $n'z - Mz$.

On peut donc réduire l'équation Y à celle-ci $\frac{3A(1+6)}{2K} \times \frac{m'dz}{n' - M} \times \frac{-\text{Cof. } \pi . \text{Sin. } \pi . \zeta \text{ Sin. } v'}{-365\frac{1}{4}} = d(\text{Sin. } \pi)$; dans laquelle on mettra ſimplement au lieu de $-\zeta$ Sin. v' la quantité $\frac{\text{Cof. } \delta - U' + n'z - Mz}{2}$. Or $\delta - U'$ eſt la diſtance de la projection du Pôle au nœud aſcendant, lorſque $z = 0$, car U' eſt la diſtance du lieu Ecliptique de la Lune à la projection du Pôle, & δ la diſtance du lieu Ecliptique de la Lune au nœud. Donc $\delta - U'$ eſt ici $= 90°$; car nous ſuppoſons avec M. *Brad-*

ley, que le Pôle eſt en ☋ lorſque le nœud eſt en ♈ : par conſéquent Cof. $\delta - U' + n'z - Mz = -$ Sin. $n'z - Mz$. Faiſant donc cette ſubſtitution, on aura Sin. $\pi =$ Sin. $\varpi - \frac{3Am'(1+G)}{2K \cdot 365\frac{1}{4}} \times \frac{\text{Sin. } \varpi \cdot \text{Cof. } \varpi \times \text{Cof. } n'z - Mz}{n' - M}$; donc $\pi = \varpi - \frac{3Am'(1+G)}{2K(365\frac{1}{4})} \times \frac{\text{Sin. } \varpi \cdot \text{Cof. } n'z - Mz}{n' - M}$: ce qui s'accordera avec les obſervations de M. *Bradley*, en ſuppoſant $\frac{3Am'(1+G)}{365\frac{1}{4} \cdot 2K(n' - M)} \times$ Sin. $\varpi = 9''$ ou Q.

Venons maintenant à l'équation Z, que nous réduirons de même que la précedente, & par les mêmes raiſons (†) à $d\epsilon = -\frac{3A}{2K \cdot k} \times (2+G) \times$ Sin. $\pi \times dz + \frac{3Am'(1+G)}{k \cdot K \text{ Cof. } \pi} dz \times \zeta$ Cof. $v' \times (1 - 2$ Cof. $\pi^2)$: donc mettant pour $1 - 2$ Cof. π^2 ſa valeur $-$ Cof. 2ϖ, & pour $-\zeta$ Cof. v' ſa valeur $\frac{\text{Sin. } \delta - \mathcal{V} + n'z - Mz}{2} =$ $\frac{\text{Sin. } 90° + n'z - Mz}{2} = \frac{\text{Cof. } n'z - Mz}{2}$, on aura $\epsilon = \frac{3A(2+G)}{365\frac{1}{4} \cdot 2K} \times$

(†) Je néglige dans cette équation le terme $d\,d\pi$, parce que π étant de l'ordre de $\frac{3Am'(1+G)}{2K \cdot k(n' - M)}$, $d\,d\pi$ ſera de l'ordre de $\frac{3Am'(n' - M)}{2K \cdot k} \times (1+G)$, & par conſéquent peut-être négligé à l'égard des termes qui ſont de l'ordre de $\frac{3Am'}{2K \cdot k}(1+G)$.

2. Sin. $\varpi - \frac{3A m' \text{Sin. } n'z - Mz}{(n'-M).2K.365\frac{1}{4}} \times \frac{\text{Cos. } 2\pi}{\text{Cos. } \pi} \times (1+6)$, ce qui s'accorde avec l'équation de M. *Bradley*, en ſuppoſant $\frac{3A(2+6)}{2K.365\frac{1}{4}} \text{Sin. } \varpi = M = \frac{1}{6.12.360}$, & $Q \text{ Sin. } \varpi$ ou $9'' \times \text{Sin. } \varpi = \frac{-3A m' \text{Cos. } 2\pi}{(n'-M).2K.365\frac{1}{4}} \times (1+6)$. Or cette ſeconde valeur de Q s'éloigne aſſez de celle que nous avons trouvée ci-deſſus, $Q = \frac{3A m' \text{Sin. } \pi (1+6)}{(n'-M)\ 2K.365\frac{1}{4}}$, & d'où l'on tire $Q \times \text{Sin. } \varpi = \frac{3A m' \text{Sin. } \pi^2 (1+6)}{(n'-M)\ 2K.365\frac{1}{4}}$: car Sin. $\varpi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ Cos. 2ϖ. Donc pour que Sin. ϖ^2 fût égal à — Cos. 2ϖ, il faudroit que Cos. 2ϖ fût $= -1$, c'eſt-à-dire que ϖ fût $= 90°$: or $\varpi = 90° - 23\frac{1°}{2}$. Donc &c.

COROLLAIRE.

53. De-là il s'enſuit que l'hypotheſe de M. *Machin* adoptée par M. *Bradley*, pour repréſenter le mouvement du Pôle de la Terre, n'eſt pas aſſez exactement conforme à la Théorie ; elle le ſeroit beaucoup davantage, ſi dans les calculs précedens, on n'avoit point le coefficient $1 - 2$ Cos. π^2, mais le coefficient 1 ; ce qui m'avoit fait ſoupçonner d'abord que je pouvois m'être trompé dans quelque Signe ; car $1 - 2$ Cos. $\pi^2 = 1 - 2yy = (1 - yy) - yy$; or ſi on avoit eu la ſomme de ces

quantités au lieu de leur différence, on auroit eu le coefficient 1 au lieu de $1 - 2$ Cos. π^2; j'ai donc recommencé mon calcul avec tout le soin possible, mais je n'y ai point découvert de faute, & l'on trouvera encore plus bas le même résultat par une autre méthode.

CHAPITRE V.

Du rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre.

54. ON a trouvé ci-dessus $\frac{3A(2+6)\text{ Sin. }\pi}{2K(365\frac{1}{4})} = \frac{1}{6.12.360} = \frac{50''}{360°}$, & Q ou $\frac{9''}{57°} = \frac{3Am'(1+6)\text{ Sin. }\pi}{(n'-M)2K.365\frac{1}{4}}$; or parce que $\frac{m'}{n'-M}$ = environ $\frac{3}{2}$, & que $\frac{1}{57°} = \frac{1}{60°} \times (1+\frac{1}{20})$ à très-peu près, on aura $2+6 : 1+6 :: \frac{50}{360} : \frac{9}{60} \times (1+\frac{1}{20}) \times \frac{2}{3} :: 50 : 38$ à très-peu près. Donc $1 : 1+6$ à peu près comme 1 à $3\frac{1}{6}$.

Si on veut faire le calcul plus exactement, on supposera $m' = \frac{5°.8'}{\text{Sin. tot.}}$ = à peu près $\frac{5°(1+\frac{1}{37})}{60°(1-\frac{1}{20})}$, ce qui donnera pour le rapport de $1+6$ à 1 celui de 35 à 15. Selon M. *Newton*, ce rapport est d'environ 1 à 4,

(*liv. 3 Princ. prop.* 37) ou plus exactement de 1 à $4\frac{1}{2}$, ce qui différe beaucoup de celui que nous venons de trouver.

REMARQUE I.

55. M. *Newton* n'a déduit le rapport $\frac{1}{1+\epsilon}$ entre les forces $\frac{S}{n^3}$ & $\frac{\lambda}{n'^3}$ que de quelques Phenomenes de la hauteur des marées : on ſent aſſez combien ce moyen eſt peu ſûr. Car la hauteur des marées eſt altérée par une infinité de circonſtances étrangeres, qui modifient beaucoup l'effet que devroit produire l'action du Soleil & de la Lune ; on peut mettre au nombre de ces cauſes la profondeur, la ſituation, & les contours différents des côtes, les courans, les vents même &c. On ne pouvoit donc pas regarder le rapport donné par M. *Newton*, comme aſſez précis, juſqu'à ce qu'on s'en fût aſſuré par quelque autre moyen beaucoup plus ſûr. Or je crois que celui dont je me ſuis ſervi eſt le plus exact qu'on puiſſe deſirer pour le préſent.

REMARQUE II.

56. M. *Daniel Bernoulli* dans ſon *Traité du Flux & Reflux de la Mer*, qui a partagé le prix de l'Académie en 1740 ; trouve $\frac{5}{2}$ pour le rapport de $1+\epsilon$ à 1, il déduit auſſi ce rapport de quelques obſervations de la hauteur des marées ; & il prétend que les obſervations dont

M. *Newton* s'eſt ſervi pour déterminer le ſien, ſont mal choiſies. Je n'entreprendrai point de décider ici cette queſtion; je me contenterai de faire remarquer que le premier rapport de 1 à $1 + \epsilon$, trouvé par mon calcul, eſt à peu près moyen entre les rapports de 1 à $4\frac{1}{2}$, & de 1 à $2\frac{1}{2}$; mais que le 2^d eſt un peu moindre que ce dernier.

Au reſte, je dois encore faire obſerver que la connoiſſance du rapport de 1 à $1 + \epsilon$ dépend de la valeur de Q, enſorte que ſi Q étoit $= 10''$ au lieu de $9''$, le rapport de 1 à $1 + \epsilon$ deviendroit très-ſenſiblement différent; ainſi quelques ſecondes de plus ou du moins dans la nutation, changeront ſenſiblement ce rapport.

REMARQUE III.

57. Il eſt viſible que le rapport de 1 à $1 + \epsilon$ étant connu, on aura facilement le rapport de la maſſe de la Lune à celle de la Terre. On peut voir le détail du calcul qu'il faut faire pour cela, dans la prop. 37 l. 3 de M. *Newton*, & dans ſes Corollaires. M. *Newton* trouve que la maſſe de la Lune eſt $\frac{1}{39}$ de celle de la Terre, en ſuppoſant $\frac{1}{1+\epsilon} = \frac{1}{4\frac{1}{2}}$; ſelon le rapport $\frac{1}{3\frac{1}{6}}$ trouvé ci-deſſus, la maſſe de la Lune ſeroit environ $\frac{1}{50}$ de celle de la Terre, & près de $\frac{1}{80}$ ſelon l'autre.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

Du mouvement que le Pôle de la Terre doit avoir ſuivant la Théorie.

58. IL ſuit de nos formules de l'*article* 52.

1°. Que $\frac{3A(1+C)m'.\text{Sin.}\,\varpi}{2K(n'-M).365\frac{1}{4}} \times \text{Cof.}\ n'z - Mz$, ou $9'' \times \text{Cof.}\ n'z - Mz$ étant l'équation de l'angle ϖ, ou le petit Arc, dont il faut augmenter l'obliquité de l'Ecliptique, en ſuppoſant le rayon = 1, la projection de cette équation ſur le plan de l'Ecliptique, ſera égale à cette équation même multipliée par Sin. ϖ. Car ſuppoſant $Cp = 1$ (Fig. 24), CQ le plan de l'Ecliptique, p l'extrémité de l'Axe de la terre, & $p\varpi$ le petit Arc de la nutation, on aura $Qq = \frac{p\varpi \times pQ}{Cp} = p\varpi \times \text{Sin.}\,\varpi$.

2°. Que l'équation de la préceſſion ſera . . . . . $\frac{3A(1+C)m' \times -\text{Cof.}\,2\varpi}{(n'-M).2K.365\frac{1}{4}.\text{Cof.}\,\varpi} \times \text{Sin.}\ n'z - Mz$; d'où il s'enſuit que la plus grande équation de la préceſſion ſera à la plus grande équation de la nutation, (projettée ſur le plan de l'Ecliptique) comme $-\frac{\text{Cof.}\,2\varpi}{\text{Cof.}\,\varpi} : \text{Sin.}\,\varpi^2$. d'où l'on tire la conſtruction ſuivante.

59. Soit $P\Upsilon$ (Fig. 25) = au Sinus total, PE = au Sinus de l'obliquité de l'Ecliptique, c'eſt-à-dire au

Sinus d'environ $23\frac{1^\circ}{2}$; PE ſera = Coſ. ϖ. Car ϖ eſt l'angle que l'Axe de la terre fait avec l'Ecliptique, & cet angle eſt le complément de $23\frac{1^\circ}{2}$. Soit pris AP : $P\Upsilon$ :: $9''$ × Sin. ϖ eſt au Sinus total, & ſoit décrit du rayon PA le cercle AOV; enſuite ſoit tracée l'Ellipſe ALV, telle que PL ſoit à AP :: — Coſ. 2ϖ : Sin. ϖ^2. Suppoſons maintenant, que tandis que le point P ſe meut ſur la circonférence PQ de P vers Q en avançant chaque année de $50''$, le point A ſe meuve de A vers L, en décrivant autour du centre P de l'Ellipſe ALV des aires proportionnelles au temps, & qu'il acheve ſa révolution dans cette Ellipſe, dans le temps que le nœud de la Lune acheve la ſienne de Υ vers $\aleph$ &c. Je dis que le mouvement du point A repréſente celui de la projection du Pôle terreſtre ſur le plan de l'Ecliptique.

Car imaginons un point O qui ſe meuve uniformément ſur la circonférence AOV, dans le temps que le point A ou b ſe meut ſur l'Ellipſe ALV, en décrivant autour du centre P des aires proportionnelles aux temps; il eſt évident que le mouvement angulaire du point O ſera préciſément égal au mouvement des nœuds de la Lune, & que les points O, b, arriveront en même temps ſur l'ordonnée BO: or tandis que le point O décrit l'angle $n'z$, le point A ou la ligne EPA décrit l'angle Mz, donc l'angle $APO = n'z - Mz$,

donc $\frac{BO}{AP}$ = Sin. $n'z - Mz$; or $Bb : BO :: PL : PA$ (*hyp.*) :: — Cosinus 2ϖ : Sinus ϖ^2. Donc $\frac{Bb}{AP} = \frac{\text{Sin. } n'z - Mz \times - \text{Cos. } 2\varpi}{\text{Sin. } \varpi^2}$; & on trouvera de même $\frac{BP}{AP}$ = Cos. $n'z - Mz$; donc $\frac{Bb}{BE}$ ou $\frac{Bb}{PE}$, c. à d. l'angle bEA que Eb fait avec $EPA = \frac{\text{Sin. } n'z - Mz \,.\, \times - \text{Cos. } 2\varpi \times AP}{\text{Cos. } \varpi \times \text{Sin. } \varpi^2} =$

$9'' \times \frac{\text{Sin. } n'z - Mz \times - \text{Cos. } 2\varpi}{\text{Cos. } \varpi \,.\, \text{Sin. } \varpi} = \frac{3A \,.\, m' \times (1 + \mathfrak{C})}{2K\,(n' - M) \,.\, 365\frac{1}{4}} \times \frac{- \text{Cos. } 2\varpi}{\text{Cos. } \varpi} \times$ Sin. $n'z - Mz$, en supposant, comme les observations l'indiquent, & comme nous l'avons déja trouvé $\frac{\text{Sin. } \varpi \,.\, 3A\, m'\,(1 + \mathfrak{C})}{2K\,(n' - M) \,.\, 365\frac{1}{4}} = 9''$. De plus, Eb ou $BE = PE + PB$ = Cos. ϖ + $AP \times$ Cos. $n'z - Mz$ = Cos. ϖ + $9'' \times$ Sinus $\varpi \times$ Cosinus $n'z - Mz$ = Cosinus ϖ + $\frac{3A\, m'\,(1 + \mathfrak{C})\ \text{Sin. } \varpi^2 \,.\, \text{Cos. } n'z - Mz}{2K \,.\, (n' - M) \,.\, 365\frac{1}{4}}$; d'où il s'ensuit, que l'angle ϖ diminuera de la quantité $\frac{3A\, m'\ (1 + \mathfrak{C})\ \text{Sin. } \varpi}{2K\ (n' - M)\ 365\frac{1}{4}} \times$ Cos. $n'z - Mz$, & que par conséquent l'obliquité de l'Ecliptique augmentera de la même quantité; or cette équation ainsi que la valeur de l'angle bEA que nous venons de trouver par la construction précedente, s'accorde parfaitement avec les valeurs que nous avons trouvées dans l'*art.* 52. d'après nos formules, c'est-à-dire d'après la Théorie. Donc la construction précedente re-

préſente le mouvement que le Pôle boreal de la terre, ou plutôt ſa projection ſur le plan de l'Ecliptique, doit avoir ſuivant la Théorie.

COROLLAIRE I.

60. Puiſque Sin. ϖ = environ $\frac{91706}{100000}$ = à peu près $\frac{9}{10}$, & que — Cof. 2ϖ = 2 Sin. ϖ^2 — 1, donc AP ou $9'' \times$ Sin. $\varpi = \frac{81''}{10} = 8''$, & $\frac{-\text{Cof. } 2\varpi}{\text{Sin. } \varpi^2}$ = à peu près $\frac{62}{81}$, c'eſt-à-dire environ $\frac{3}{4}$. Donc puiſque $PL : AB ::$ — Cof. 2ϖ : Sin. ϖ^2, il s'enſuit que PL = environ $6''$. Donc comme Cof. ϖ = environ $\frac{4}{10}$, la plus grande équation de la préceſſion, c'eſt-à-dire $\frac{PL}{PE}$ ou $\frac{PL}{\text{Cof. } \varpi}$ ſera = $6'' \times \frac{10}{4} = 15''$ à très-peu près; & ſi on faiſoit avec M. *Bradley* & M. *Machin* $PL = PG$, on trouveroit $\frac{PG}{PE} = 20''$; & ſuppoſant $AP = 9''$, on auroit $\frac{PG}{PE} = 22''$. Il ne ſeroit donc pas ſurprenant que l'équation réelle de la préceſſion différât tant ſoit peu de celles de MM. *Bradley* & *Machin*.

REMARQUE I.

61. M. *Machin* n'a encore rien publié que je ſache,

de ſa Théorie ſur la nutation de l'Axe de la terre. Ainſi je n'ai pu m'éclaircir encore ſur la cauſe de la différence qu'il y a entre les réſultats de ſon calcul & du mien. Je vois ſeulement par un endroit de la lettre de M. *Bradley*, que M. *Machin* a pris pour hypotheſe, que le *mouvement en nutation de l'Axe de la terre ſoit* GOUVERNÉ *par le Pôle de l'orbite de la Lune ſeulement*; c'eſt du moins l'unique ſens que je puiſſe attacher à ces paroles de la lettre, *upon te ſuppoſition, that te* WHOLE *is* GOVERNED *by the Pole of the Moo'ns orbit only*: or j'ignore ce que M. *Machin* entend ici par le *Pôle* de l'orbite de la Lune. D'ailleurs, il me ſemble qu'il eſt eſſentiel de faire voir pourquoi l'équation la plus ſenſible du mouvement du Pôle de la terre, eſt celle qui vient de l'inclinaiſon de l'orbite & du mouvement des nœuds; en effet, cette inclinaiſon étant fort petite, il ſemble aſſez naturel de penſer, que s'il en réſulte une équation ſenſible dans le mouvement de l'Axe de la terre, il en doit réſulter une beaucoup plus conſidérable de l'action de la Lune & de celle du Soleil, en négligeant l'inclinaiſon; ce ſoupçon peut paroître d'autant plus fondé, que l'action ſeule du Soleil produit comme on ſçait des inégalités très-ſenſibles dans le mouvement des nœuds de l'orbite de la Lune, & dans l'inclinaiſon de cette orbite. On peut donc croire que cette action jointe à celle de la Lune, & abſtraction faite de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, doit produire une équation aſſez conſidérable dans le mouvement des nœuds de l'Equateur; ou du

moins ſi cette équation eſt peu ſenſible, il ſemble que celle qui eſt produite par l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, devroit l'être beaucoup moins, puiſque l'inclinaiſon de l'orbite lunaire eſt fort petite, & que l'équation qui en réſulte ſeroit nulle, ſi l'inclinaiſon l'étoit. Ce n'eſt donc que par un calcul exact & rigoureux, & dans lequel on fera entrer l'action du Soleil & celle de la Lune, en ayant égard à toutes les circonſtances de ce mouvement, qu'on pourra s'aſſurer que l'équation qui vient de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire & du mouvement de ſes nœuds, eſt en effet beaucoup plus grande que toutes les autres. C'eſt ce que nous croyons avoir prouvé dans l'*article* 52 ci-deſſus.

REMARQUE II.

62. Au reſte, je dois avertir que M. *Bradley* dit dans ſa lettre p. 35, que le mouvement du Pôle ſeroit plus exactement conforme aux obſervations, ſi on ſuppoſoit que le *vrai* Pôle de la terre décrivît non un cercle, mais un Ellipſe dont les Axes AC, (Fig. 23) DB fuſſent entr'eux comme $18''$ à $16''$. Suivant nos calculs, les Axes AP, (Fig. 25) PL étant comme $9'' \times \frac{9}{10}$ à $6''$, le *vrai* Pôle de la terre décriroit une Ellipſe dont les Axes ſeroient entr'eux comme $18''$ à $12''$; ainſi à cet égard notre Théorie ſeroit un peu moins différente des obſervations de M. *Bradley*. Mais il paroît que c'eſt l'ob-

ſervation ſeule & non la Théorie, qui a déterminé M. *Bradley* à faire décrire au Pôle de la terre une Ellipſe au lieu d'un cercle : il ávoue même que cette ſuppoſition ne s'accorde pas encore parfaitement avec les obſervations, & il laiſſe *à la Théorie* le ſoin de déterminer exactement le lieu du *vrai* Pôle. D'ailleurs j'ignore, comme je l'ai déja obſervé, ſi par le mot de *vrai* Pôle de la terre, il entend le Pôle réel de la terre, c'eſt-à-dire l'extrémité de ſon Axe, ou la projection de cette extrémité ſur l'Ecliptique. Car comme il faut diſtinguer le *vrai* Pôle de la terre d'avec ſa projection, & qu'il faut diſtinguer auſſi le *vrai* mouvement du Pôle d'avec ſon mouvement moyen, il me ſemble que le mot de *vrai* eſt ici équivoque ; enſorte que ſi c'étoit les Axes AP, PL de la projection qui fuſſent entr'eux comme 18 à 16, les Axes de l'Ellipſe décrite par le Pôle, ſeroient comme 18 à $16 \times \frac{9}{10}$, c'eſt-à-dire comme 18 à $14\frac{2}{5}$; ce qui ſeroit encore plus conforme à la Théorie.

COROLL. II.

63. Il eſt viſible que la ligne PO faiſant toujours un angle droit avec la ligne des nœuds de la Lune, le Sinus de $n'z - Mz$ ou de l'angle OPA eſt égal au Sinus de la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, cette diſtance $\Upsilon\,\Omega$ étant priſe contre l'ordre des ſignes ; donc le Sinus de $n'z - Mz$

eſt égal au Sinus pris négativement, de la diſtance ☊☌☍☋☿ du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, priſe ſuivant l'ordre des Signes; à l'égard du Coſinus de $n'z - Mz$, il ſera égal au Coſinus, pris poſitivement, de la même diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, priſe ſuivant l'ordre des Signes.

Or ſuivant la Remarque précedente, on a $9'' \times$ Coſ. $n'z - Mz$ pour l'équation additive de l'obliquité de l'Ecliptique, & $15'' \times$ Sin. $n'z - Mz$ pour l'équation additive de la préceſſion : de-là on tire les deux analogies ſuivantes.

Premiere analogie : comme le Sinus total eſt au Coſinus de la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, ainſi $9''$ ſont à une équation π' qu'il faudra ajouter à l'obliquité de l'Ecliptique, c'eſt-à-dire à $23\frac{1^{\circ}}{2}$; il eſt viſible que cette équation ſera ſouſtractive, ſi la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries eſt entre 90° & 270°.

Seconde analogie ; comme le Sinus total eſt au Sinus de la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, ainſi $15''$ ſont à une équation ε' dont il faut diminuer la préceſſion ; cette équation ſera viſiblement additive, ſi la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries eſt plus grande que 180°.

Remarque

REMARQUE III.

64. On voit par les formules ou analogies précedentes, que l'équation de la préceſſion & la nutation ne doivent pas redevenir exactement les mêmes après une révolution des nœuds de la Lune, parce que durant ce tems le premier point d'Aries a rétrogradé d'environ $(18\frac{1}{2}) \times 50''$, c'eſt-à-dire à peu près de $15'$. Mais ce mouvement eſt trop petit, pour qu'on s'apperçoive en 20 ans du changement qu'il peut produire dans la nutation. Cependant il paroît que M. *Bradley* y a eu égard, comme on le voit par la conſtruction que nous avons donnée d'après lui dans l'*article* 50.

CHAPITRE VII.

Du changement que la nutation de l'Axe de la terre, & l'équation de la préceſſion doivent produire dans le lieu apparent des étoiles.

65. SOIT comme ci-devant $\Upsilon \mathfrak{S} \simeq$ (Fig. 26) l'Ecliptique, & $\Upsilon K \simeq$ une portion de l'Equateur, faiſant avec l'Ecliptique un angle de $23\frac{1}{2}^{\circ}$ (cette portion ou moitié de l'Equateur doit être imaginée au-deſſous du plan de l'Ecliptique); ſoit $\Upsilon\Upsilon'$ l'équation

de la préceſſion que je nomme $-\epsilon'$, & qui ſe déterminera par la ſeconde des deux analogies de l'*article 63*; il eſt viſible que l'Equateur ſe trouvera alors dans la ſituation $\Omega' K' \Upsilon'$, & que la différence des Arcs $K'\Upsilon$ & $K'\Upsilon'$ ſera $\Upsilon\Upsilon' \times$ Coſ. $23\frac{1^\circ}{2} = -\epsilon'$ Sin. ϖ. Donc $K'\Upsilon' = K'\Upsilon - \epsilon'$ Sin. ϖ; & l'angle $\Upsilon K'\Upsilon'$ des deux plans ſera $= -\epsilon'$ Coſ. ϖ, dans l'hypotheſe que l'Equateur faſſe toujours un angle conſtant avec l'Ecliptique. Je chercherai d'abord dans cette hypotheſe la variation des Etoiles en aſcenſion droite & en déclinaiſon, enſuite je déterminerai cette même variation dans l'hypotheſe que l'équation de la préceſſion ſoit nulle, & que l'angle de l'Equateur & de l'Ecliptique varie: & comme les deux équations de l'obliquité & de la préceſſion ſont fort petites, la ſomme de ces deux variations partielles ſera à très-peu près la variation totale.

66. Soit donc d'abord (Fig. 27) $K'DQ$ un quart de l'Equateur qui différera très-peu de l'Arc $K'\Upsilon$, PB le Coſinus de la déclinaiſon d'une Etoile, & DV le Sinus de ſon aſcenſion droite ΥD, il s'agit de déterminer ce que deviendront ce Coſinus & ce Sinus, lorſque le plan $K'D\Upsilon$ viendra dans la ſituation $K'\Upsilon'$, l'Etoile n'ayant pas changé de poſition par rapport au plan $K'D\Upsilon$.

Soit tirée BA perpendiculaire à PK'; la ligne menée de l'Etoile au point B étant perpendiculaire à PB & au plan $K'PB$, il eſt facile de voir que la ligne

menée de l'Etoile au point A, fera un angle droit avec PA; d'où il s'enſuit, que ſi Pb (Fig. 28) eſt le Coſinus de la déclinaiſon de l'Etoile, lorſque le plan $K'PB$ devient $K'Pb$, la ligne bA perpendiculaire à la commune ſection $K'P$ des deux plans tombera ſur l'extrémité A, de la ligne BA. Car ſi elle tomboit ailleurs, comme en a, alors les deux lignes menées de l'Etoile aux points A, a, ſeroient toutes deux perpendiculaires à $K'P$, ce qui eſt impoſſible. Donc les lignes BA, bA ſont dans un plan perpendiculaire à $K'P$: donc l'angle BAb, des lignes BA, Ab, eſt égal à l'angle des plans $K'PB$, $K'Pb$, & par conſéquent $= -\,i'$ Coſ. ϖ. Donc nommant s le Sinus de la déclinaiſon de l'Etoile qui eſt ſuppoſée ici Méridionale, on aura $Ab = AB + s \times -\,i'$ Coſ. ϖ; car ſoit E (Fig. 29) l'Etoile, & EB, Eb les Sinus de déclinaiſon, on aura $Ab = AB + Ob = AB + EB \times$ angl. BAb; de-là il eſt facile de voir, qu'à cauſe des triangles rectangles PAB, (Fig. 28) PAb, le Coſinus Pb ſera $= PB + (Ab - AB) \times \frac{AB}{PB} =$ PB (Fig. 27) $- s \times i'$ Coſ. $\varpi \times \frac{DE}{DP}$. Or DE eſt ſenſiblement égal au Coſinus de l'aſcenſion droite, parce l'Arc $K'\Upsilon$ différe très-peu de 90°. donc nommant t le Coſinus de l'aſcenſion droite, on aura $st \times -\,i'$ Coſ. ϖ pour l'augmentation du Coſ. de la décl. Donc la déclinaiſon ſera diminuée d'un angle $= \frac{st \times -\,i' \text{Coſ.} \varpi}{s}$; donc

$+ \varepsilon'$ Cos. $\varpi \times$ Cos. asc. dr. sera l'équation de la déclinaison.

De plus, (Fig. 28 & 27) on voit que l'angle $K'Pb = K'PB + (Ab - AB) \times \frac{AP}{PB^2} = K'PB - \varepsilon' . s$ Cos. $\varpi \times \frac{PE}{PD} \times \frac{1}{PB} = K'PB - \frac{\varepsilon' \text{ Cos. } \varpi \times \text{Sin. décl.}}{\text{Cos. décl.}} \times$ Sin. asc. dr. Or la distance du point K' au point $\Upsilon' = K'\Upsilon - \varepsilon' \times$ Sin. ϖ; par conséquent la distance du point b au point $\Upsilon' = K'\Upsilon - \varepsilon' \times$ Sinus ϖ — angl. $K'PB + \frac{\varepsilon' \text{ Cos. } \varpi \times \text{Sin. décl.} \times \text{Sin. asc. dr.}}{\text{Cos. décl.}}$: or $K'\Upsilon$ — angl. $K'PB$ est l'ascension droite de l'Etoile, lorsque le Cosinus de sa déclinaison est PB. Donc l'équation de l'ascension droite est $-\varepsilon'$ Sin. $\varpi + \varepsilon'$ Cos. $\varpi \times$ tang. décl. $\times$ Sin. asc. dr.

67. Supposons maintenant, que l'angle de l'Ecliptique avec l'Equateur varie, & que le plan $K'P\Upsilon'$ (Fig. 30) s'éléve en tournant autour de $P\Upsilon'$, de la quantité π' qu'on déterminera par la premiere des deux analogies données dans l'*art.* 63; on trouvera par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire tout à l'heure, que par ce mouvement la ligne bO deviendra $bO + \pi' \times$ Sin. décl. & le Cosinus Pb, $Pb + \frac{\pi' . \text{ Sin. décl.} \times bO}{Pb} = Pb + \pi'$ Sin. décl. $\frac{DV'}{PD} = Pb + \pi'$ Sin. décl. $\times$ Sin. asc. droite. Donc la déclinaison sera diminuée de l'angle $\frac{\pi' \text{ Sin. décl.} \times \text{Sin. asc. dr.}}{\text{Sin. décl.}}$; donc l'équation de la déclinaison

ſera $-\pi'$. Sin. aſc. dr. A l'égard de l'aſcenſion droite, on voit que bO étant augmenté de la quantité $\pi' \times$ Sin. décl. l'aſcenſion droite ſera augmentée de l'angle $\frac{\pi'. \text{Sin. décl.} \times PO}{Pb^2} = \frac{\pi' \text{ Sin. décl.}}{\text{Cof. décl.}} \times$ Cof. aſc. dr. Donc l'équation de l'aſcenſion droite ſera π' Cof. aſc. dr. $\times$ tang. décl. Donc ajoutant enſemble les deux équations en aſcenſion droite & en déclinaiſon, on aura . . . . . s' Cof. $\varpi \times$ Cof. aſc. dr. $- \pi' \times$ Sin. aſc. dr. pour l'équation de la déclinaiſon.

Et $- s'$ Sin. $\varpi + s'$ Cof. $\varpi \times$ tang. décl. $\times$ Sin. aſc. dr. $+ \pi'$ tang. décl. $\times$ Cof. aſc. dr. pour l'équation de l'aſcenſion droite.

COROLLAIRE.

68. Pour rendre l'uſage de ces deux formules facile, on remarquera que (*art.* 63) $- s' = - 15''$ multipliées par le Sinus du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, & que $\pi' = 9''$ multipliées par le Coſinus de cette même diſtance : donc nommant p & q ces Sinus & Coſinus, on aura s'. Cof. $\varpi = 15'' \times \frac{4}{10} \times p$; s' Sin. $\varpi = 15'' \times \frac{9}{10} p$; & $\pi = 9'' q$: d'où l'on tire les deux regles ſuivantes. Soit p le Sinus de la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries, q ſon Coſinus; je dis que l'*équation de la déclinaiſon* ſera $+ 6'' \times p$ Cof. aſc. dr. $- 9'' q$ Sin. aſc. dr. & que l'*équation*

de l'aſcenſion droite ſera $-13\frac{1}{2}''\,p + 6''\,p$ tang. décl. × Sin. aſc. dr. $+ 9''\,q$ tang. décl. × Coſ. aſc. droite: le Sinus p devra être pris négativement, ſi la diſtance du nœud aſcendant de la Lune au premier point d'Aries eſt de plus de 180, & le Coſinus q devra être pris négativement, ſi cette diſtance eſt entre 90° & 270°.

REMARQUE I.

69. Les formules précedentes ſont pour les Etoiles dont la déclinaiſon eſt Méridionale, & qui n'ont pas plus de 90° d'aſcenſion droite. Si elles en avoient plus de 90 & moins de 180, il faudroit faire négatif le Coſinus de l'aſcenſion droite.

Si la déclinaiſon eſt Méridionale, & que l'Etoile ait plus de 180 degrés d'aſcenſion droite, enſorte que le point B (Fig. 27) auquel l'Etoile répond perpendiculairement ſe trouve dans le quart de cercle $\triangle k \flat$, en ce cas la tangente de la déclinaiſon, & le Coſinus auſſi-bien que le Sinus de l'aſcenſion droite ſeront des quantités négatives, & devront être priſes comme telles dans les formules de l'*article* précedent.

Si la déclinaiſon de l'Etoile eſt Septentrionale, & que ſon aſcenſion droite ne ſoit pas plus grande que 180 degrés, la tangente de la déclinaiſon devra être priſe négativement.

Si la déclinaiſon de l'Etoile eſt Septentrionale, &

que ſon aſcenſion droite ſoit plus grande que 180 degrés, la tangente de la déclinaiſon devra être priſe poſitivement.

Quand l'équation eſt ſouſtractive & que la déclinaiſon eſt Septentrionale, c'eſt une marque que la déclinaiſon doit être augmentée; quand elle eſt additive, & que la déclinaiſon eſt Septentrionale, c'eſt une marque que la déclinaiſon doit être diminuée.

REMARQUE II.

70. Au reſte, l'uſage de ces formules ſuppoſe qu'on ait déja calculé l'aſcenſion droite & la déclinaiſon, en ayant égard à la préceſſion moyenne de 50″ par an. En vertu de cette préceſſion moyenne, la variation annuelle des Etoiles en déclinaiſon, eſt $-50'' \times \text{Sin. } 23\frac{1}{2}^{\circ} \times \text{Cof. aſc. dr.}$ & leur variation en aſcenſion droite, eſt $50'' \times \text{Cof. } 23\frac{1}{2}^{\circ} - 50'' \times \text{Sin. } 23\frac{1}{2}^{\circ} \times \text{tang. décl.} \times \text{Sin. aſc. dr.}$ ce qui ſe trouve aiſément par la même méthode que dans l'*art.* 67; il faut donc calculer par ces formules la variation annuelle des Etoiles, ou leur variation pendant une partie quelconque de l'année, avant de faire uſage des formules de l'*article* 67 qui ne dépendent que de la nutation de l'Axe, & de l'*équation* de la préceſſion.

REMARQUE III.

71. Les formules de l'*art.* 67 ne ſont plus exactes, lorſque la déclinaiſon eſt de près de 90, parce qu'alors la tangente de la déclinaiſon eſt fort grande, & que l'équation devient fort grande auſſi. Dans ce cas, l'angle $K'Pb$ (Figure 28 & 27) a pour tangente $\frac{Ab}{PA} =$

$\frac{AB - i' . s . \text{Cof. } \varpi}{PA} =$ cotang. aſc. dr. $- \frac{i' . s . \text{Cof. } \varpi}{PE \times PB} \times PD$

$=$ cotang. aſc. dr. $- i' . s . \text{Cof. } \varpi \times \frac{1}{\text{Cof. décl. Sin. aſc. dr.}}$.

Ayant calculé cet angle $K'Pb$, on aura facilement enſuite l'angle $bP\Upsilon'$; après quoi on cherchera par la même méthode, de combien ce même angle $bP\Upsilon'$ (Fig. 30) doit varier par le changement d'obliquité de l'Ecliptique. Au reſte, ce calcul eſt aſſez inutile, n'y ayant point d'Etoiles plus proches du Pôle que de deux degrés, & je crois qu'on peut s'en tenir aux deux formules de l'*article* 67.

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Remarques sur la Théorie précedente, qui servent à la confirmer.

REMARQUE I.

72. NOUS avons déterminé dans l'*art.* 30 le mouvement d'un point quelconque du globe terrestre, en décomposant ce mouvement en trois autres, l'un perpendiculaire, les deux autres paralleles au plan de l'Ecliptique, & nous avons trouvé 1°. que le mouvement perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, est

$$fdy \text{ Cosinus } X - fydP \text{ Sinus } X - \frac{ydy\,(a-b)}{\sqrt{[1-yy]}};$$

2°. que le mouvement parallele à la ligne $q'v'$ (Fig. 20), est $-ydz \times (a-b) + fdz$ Cos. $X \times \sqrt{[1-yy]} + fdP$ Cos. X; 3°. que le mouvement parallele au Méridien qui est perpendiculaire sur l'Ecliptique, est

$$\frac{fydy \text{ Cos. } X}{\sqrt{[1-yy]}} + (a-b)\,dy + fdz \text{ Sin. } X + fdP \text{ Sin. } X \times \sqrt{[1-yy]}.$$

Or nous avons trouvé dans l'*art.* 44, qu'en général dP étoit $= -dz\sqrt{[1-yy]} + kdz$, kdz exprimant une constante ; donc substituant cette valeur de dP, on aura pour l'expression de ces trois mouvemens,

1°. $f dy \times \text{Cosin. } X - \frac{y dy (a-b)}{\sqrt{[1-yy]}} + fy ds \times \text{Sin. } X \times \sqrt{[1-yy]} - fyk dz \times \text{Sin. } X$ . . . . . .

2°. $- y ds (a - b) + fk dz \times \text{Cosin. } X$;

3°. $\frac{fy dy \text{ Cos. } X}{\sqrt{[1-yy]}} + (a - b) dy + fyy ds \times \text{Sin. } X +$ $fk dz \text{ Sin. } X \sqrt{[1 - yy]}$.

Or je dis, que ſi on fait deux de ces mouvemens $= o$, le troiſiéme le ſera auſſi néceſſairement. Car ſoient, par exemple, le ſecond & le troiſiéme $= o$, on aura $\frac{a-b}{f} = \frac{kdz \text{ Cos. } X}{yds}$, & $\frac{ydy \text{ Cos. } X}{\sqrt{[1-yy]}} + \frac{kdz dy \text{ Cos. } X}{yds} + yy ds \times$ Sin. $X +$ kdz Sin. $X . \sqrt{[1-yy]} = o$; d'où l'on tire tang. X ou $\frac{\text{Sin. } X}{\text{Cos. } X} = (\frac{-ydy}{\sqrt{[1-yy]}} - \frac{kdz dy}{yds}) : (yy ds +$ $kdz \sqrt{[1-yy]} = \frac{-dy}{yds\sqrt{[1-yy]}}$. Maintenant, ſi l'on fait le premier de ces mouvemens $= o$, on trouve $dy \text{ Cos. } X - \frac{ykdzdy \text{ Cos. } X}{yds\sqrt{[1-yy]}} + yds \text{ Sin. } X \sqrt{[1-yy]} -$ $ykdz \times \text{Sin. } X = o$, & par conſéquent, on a $\frac{\text{Sin. } X}{\text{Cos. } X} =$ $(-dy + \frac{kdzdy}{ds\sqrt{[1-yy]}}) : (yds\sqrt{[1-yy]} - ykdz) =$ $\frac{-dy}{yds\sqrt{[1-yy]}}$, ce qui s'accorde avec la valeur précédente.

Donc ſi on veut trouver dans le plan CKH (Fig. 31)

perpendiculaire à l'Axe Cp, un point qui ſoit en repos, il n'y a qu'à prendre l'angle $KC'G$ dont la tangente $= \frac{-dy}{y\,ds\,\sqrt{[1-yy]}}$, & ſur la ligne GC' le point O, tel que $\frac{C'O}{CC'}$ ou $\frac{f}{a-b} = \frac{y\,ds}{k\,dz\,\text{Cof. } KC'G}$; il eſt clair que ce point O ſera en repos durant l'inſtant que la projection du point p décrit l'angle ds; or on voit par ces formules, que le rapport de $C'O$ à $C'C$ eſt toujours le même, quelque part qu'on place le point C', & que la tangente de l'angle $KC'G$ eſt auſſi toujours la même: d'où il s'enſuit que tous les points placés dans la ligne CO ſeront en repos, & qu'ainſi on peut regarder CO comme l'Axe *inſtantané* de la rotation du corps. Je dis *inſtantané*: car il eſt viſible que cet Axe change continuellement.

J'ai pris le point G du côté oppoſé à celui ſuivant lequel les angles X ſont pris dans la ſolution générale, parce que la tangente de l'angle $KC'G$ eſt négative étant $= \frac{-dy}{y\,ds\,\sqrt{[1-yy]}}$. Car j'ai ſuppoſé dans la ſolution générale, que y alloit en croiſſant, ainſi $-dy$ eſt une quantité négative.

On peut s'aſſurer de la bonté de ce calcul, en prouvant par la Geométrie ſimple, que l'Axe CO de rotation doit être en effet dans le plan $GC'C$. Pour cela, ſoit pp' (Fig. 32) l'Arc que décrit l'extrémité de l'Axe terreſtre, il eſt certain que tous les points de l'Axe décriront des Arcs ſemblables à celui-ci, & que l'Axe

de rotation ſera dans un plan perpendiculaire à la ligne pp'. Or la ligne pp' eſt perpendiculaire à l'Axe de la terre, & pQ étant regardé comme une petite portion du Méridien perpendiculaire à l'Ecliptique, on voit que ſi on prolonge cet Arc ſuivant la ligne droite pZ, & qu'on prenne pV perpendiculaire à pp' pour marquer le plan de rotation, la tangente de l'angle ZpV ſera $= \frac{pQ}{Qp'} = \frac{-dy}{\sqrt{[1-yy]}.ydt}$, parce que $pQ = \frac{-ydy}{\sqrt{[1-yy]}}$, & $p'Q = ydt$. Donc &c. On voit par cet accord la juſteſſe de nos calculs.

REMARQUE II.

37. Si l'extrémité p de la ligne Cp (Fig. 31) décrit un Arc de grand cercle, CO devient perpendiculaire à CC', & f devient infinie par rapport à $a - b$. Donc à cauſe de $\frac{f}{a-b} = \frac{ydt}{kdz \text{ Cof. } X}$, on a $k = 0$; car on a en général $\frac{f}{a-b} = \frac{\sqrt{[y^2dt^2 + \frac{dy^2}{1-yy}]}}{kdz}$, à cauſe de Cof. $X = \frac{ydt}{\sqrt{[y^2dt^2 + \frac{dy^2}{1-yy}]}}$. Donc $\frac{f}{a-b} = \frac{pp'}{kdz}$ (Fig. 32); donc puiſque (*hyp.*) pp' n'eſt pas $= 0$, il s'enſuit que $k = 0$, ſi f eſt infinie par rapport à $a - b$. Or de ce que $k = 0$, il s'enſuit que dP ou $-dt\sqrt{[1-yy]} + kdz$ (*art.* 44) ſe réduit à $-dt\sqrt{[1-yy]}$.

Maintenant, on peut s'aſſurer par un autre moyen, que

l'angle dP eſt $= -de\sqrt{[1-yy]}$, lorſque l'extrémité de l'Axe décrit un Arc de grand cercle. En effet, lorſque l'extrémité p de l'Axe de la terre décrit un Arc de grand cercle, il eſt facile de voir que la rotation ſe fait autour de quelque ligne placée dans le plan de l'Equateur, lequel eſt perpendiculaire à l'Axe de la terre. Soit CR (Figure 33) cette ligne, CQ la commune ſection de l'Equateur CQR & de l'Ecliptique OQZ, OQL l'angle de l'Ecliptique & de l'Equateur, lequel a pour Sinus y, & $\sqrt{[1-yy]}$ pour Coſinus. Soient enſuite RQ, Rq les poſitions ſucceſſives de l'Equateur dans l'inſtant que l'extrémité p ſe meut de p en p'; il eſt évident, en menant la ligne ou petit Arc Qq perpendiculaire à RQ & à Rq, que le point Q parviendra en q, & qu'ainſi le chemin Zq de ce point ſera $= -ZQ \times$ Sin. angl. $ZQq = -ZQ \times$ Coſ. QZq ou $-ZQ \times$ Coſ. OQL. Remarquez que je mets $-ZQ$, parce que j'ai ſuppoſé dans la ſolution générale, que dP étoit de Z vers R, & qu'ici il eſt de Z vers q. Or l'angle ou arc $ZQ = de$; car la commune ſection CQ de l'Equateur & de l'Ecliptique étant toujours perpendiculaire à la projection de l'Axe, ſon chemin ou ſa viteſſe angulaire doit être $=$ à la viteſſe angulaire de de cette projection, & dans le même ſens : donc Zq ou $dP = -de\sqrt{[1-yy]}$; ce qui confirme de nouveau la juſteſſe & la bonté de nos calculs.

REMARQUE III.

74. Suppoſons qu'aucune force n'agiſſe ſur le globe terreſtre que celle de ſa rotation primitive, il eſt certain qu'on aura $A = o$ dans l'*article* 44; & les équations V & X de cet article qui ſont également applicables au cas où la terre eſt un Globe, & à celui où elle eſt un Sphéroide, ſe réduiront à . . . . .

$$d\,(ds\ \text{Coſinus}\ \pi^2) + \frac{2Kd\,(k\,dz\ \text{Sinus}\ \pi)}{M+K} = o,$$

& $-ds^2$ Coſinus π . Sin. $\pi + \frac{2K\,(k\,dz\,ds\ \text{Cof.}\ \pi)}{M+K} = dd\pi$, qui ſe changent en celle-ci ſeule, ...

$$-ds^2\ \text{Coſinus}\ \pi\ .\ \text{Sinus}\ \pi - \frac{d(ds\ \text{Cof.}\ \pi^2).ds}{d\pi} = dd\pi$$

ou $2d\pi\,dd\pi + ds^2\,\frac{\text{Sin.}\ 2\pi}{2} \times 2d\pi + \frac{2ds\,dds}{2} + \frac{2ds\,dds}{2} \times$ Coſin. $2\pi - \frac{ds^2\,.\,4\,d\pi\ \text{Sin.}\ 2\pi}{2} = o$, dont l'intégrale eſt

$$d\pi^2 + ds^2\,(\tfrac{1}{2} + \frac{\text{Cof.}\ 2\pi}{2}) - N\,dz^2 = o,$$ ou $d\pi^2 + ds^2$ Cof. $\pi^2 = N\,dz^2$, N & dz étant conſtantes; or $V[d\pi^2 + ds^2$ Cof. $\pi^2]$ eſt évidemment l'Arc pp' que décrit l'extrémité p de l'Axe, ce qui prouve que la viteſſe de ce point eſt conſtante, s'il n'y a point d'autre force que celle de la rotation; or on ſçait que cette propoſition eſt vraie pour un globe qui tourne; nouvelle confirmation de la bonté de nos calculs. De plus,

on voit que cette propoſition eſt vraie auſſi pour un Sphéroide Elliptique, qui ne ſeroit animé par aucune autre force, que par celle de ſa rotation primitive autour d'un Axe quelconque.

REMARQUE IV.

75. Donc puiſque (*article* 72) $\frac{a-b}{f} = \frac{kdz \text{ Cof. } X}{ydt}$, & que Cof. $X = \frac{ydt}{\sqrt{[dx^2 + y^2dt^2]}}$, il s'enſuit que $\frac{a-b}{f} = \frac{kdz}{\sqrt{[dx^2 + dt^2 \text{ Cof. } x^2]}}$; d'où l'on voit que ſi aucune autre force n'agit ſur la terre que ſa force primitive de rotation, l'angle OCC' (Fig. 31) entre l'Axe de *rotation* CO, & l'Axe CC' de *figure* ſera toujours conſtant. Cette propoſition eſt en effet vraie pour un globe ; car tant qu'aucune force étrangere n'agit ſur lui, il conſerve toujours le même Axe de rotation, & par conſéquent chacun de ſes diamétres qu'on peut regarder comme ſon Axe CC', fait toujours le même angle avec l'Axe de rotation. On voit auſſi que cette propriété a lieu dans un Sphéroide.

REMARQUE V.

76. Si dans la Figure 32 on prolonge la partie infiniment petite pQ du Méridien juſqu'en R, il eſt facile de voir que cette ligne fera un angle droit avec l'Axe de la terre, & que pR ſera à la diſtance $\sqrt{[1 - yy]}$ du

point p à l'Ecliptique, comme 1 à y. D'où il s'enſuit que cette tangente $pR = \frac{\sqrt{[1-yy]}}{y}$. De plus, ſoit V le point où ſe trouve l'Axe de rotation dans la ligne pV, & ſoit prolongée cette ligne juſqu'en S, il eſt clair que $\frac{a-b}{f}$ étant $= \frac{kdz}{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 ds^2]}}$, & $a - b = 1$ au point p, on aura $pV = \frac{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 ds^2]}}{kdz}$. De plus pS, ſera à pR comme le Sinus total eſt au Cof. X; d'où il s'enſuit que $pS = \frac{pR \times \sqrt{[d\pi^2 + y^2 ds^2]}}{yds} = \frac{\sqrt{[1-yy]} \cdot \sqrt{[d\pi^2 + yyds^2]}}{yyds}$. Donc $SV = (yyds + kdz\sqrt{[1-yy]}) \times \frac{\sqrt{[d\pi^2 + y^2 ds^2]}}{yyds \cdot kdz}$. Donc la diſtance du point V au plan de l'Ecliptique, c'eſt-à-dire $\frac{SV \times \sqrt{[1-yy]}}{pS} = \frac{yyds + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz}$.

Il ſuit de-là 1°. que ſi la terre étoit un globe parfait, ſur lequel le Soleil & la Lune n'exerçaſſent point d'action, $\frac{yyds + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz}$ devroit être conſtante, parce que l'Axe de rotation ne changeroit point de place, & que par conſéquent il ſeroit toujours à la même diſtance du plan de l'Ecliptique; & c'eſt en effet ce qui ſe trouve vrai par l'équation Y (*art.* 45). Car faiſant $A = 0$, on trouve $d(ds \text{ Cof. } \pi^2) + d(kdz \text{ Sin. } \pi) = 0$, &

& par conſéquent $d\varepsilon$ Cof. $\pi^2 + kdz$ Sin. $\pi = Ndz$, N érant un nombre conſtant ; donc à cauſe de Coſinus $\pi = y$, & de Sinus $\pi = \sqrt{[1-yy]}$, on aura $\frac{yyd\varepsilon + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz} = \frac{N}{k}$, c'eſt-à-dire égal à un nombre conſtant, ce qui confirme de nouveau la bonté de nos formules.

2°. Si la terre eſt un Sphéroide, on a en ſuppoſant $A = 0$, $d\varepsilon$ Cof. $\pi^2 + \frac{2K \cdot kdz \text{ Sin. } \pi}{M+K} = Ndz$ ſuivant la formule V de l'*article* 44 ; donc $\frac{yyd\varepsilon + kdz\sqrt{[1-yy]}}{kdz}$, c'eſt-à-dire la diſtance du Pôle V de rotation au plan de l'Ecliptique, ſera $\frac{N}{k} + \frac{M-K}{M+K} \times (\text{Sin. } \pi)$: d'où l'on voit que cette diſtance variera un peu, à cauſe que la quantité $M - K$ n'eſt $= 0$, que quand la terre eſt un globe. Elle ſera cependant conſtante, 1°. ſi on a Sin. $\pi =$ à une conſtante, c'eſt-à-dire, ſi l'Axe de la terre eſt l'Axe même de rotation ; 2°. ſi on a $k = 0$, c'eſt-à-dire ſi l'Axe de rotation eſt perpendiculaire à l'Axe de figure ; la ligne pV devenant alors infinie. On pourroit croire qu'il y auroit encore un troiſiéme cas, ſçavoir celui où l'Axe tourneroit autour d'une ligne perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, l'extrémité de cet Axe décrivant un cercle parallele à ce plan ; car alors Sin. π ſeroit conſtant. Mais il eſt aiſé de ſe convaincre, que ce cas ne ſçauroit avoir lieu ; car par l'équation X, on a

$dd\pi = -ds^2$ Cof. π Sin. $\pi + k\,dz\,ds$ Cof. $\pi \times \frac{2K}{M+K}$:

d'où l'on voit que pour que π fût conſtant, il faudroit qu'on eût $ds = 0$, ou $ds = \frac{k\,dz}{\text{Sin. }\pi} \times \frac{2K}{M+K}$. Or 1°. ſi le Pôle de la terre eſt ſuppoſé *ſe mouvoir* parallélement à l'Ecliptique, on ne ſçauroit ſuppoſer $ds = 0$. 2°. Si on fait Sin. π conſtant, & par conſéquent $d\pi = 0$, on aura Cof. X ou $\frac{y\,ds}{\sqrt{[a\pi^2 + y^2\,ds^2]}} = 1$; la ligne pV, (Fig. 32) coupée en V par l'Axe de rotation, tombera donc alors ſur pZ, & l'on aura $pV = \frac{y\,ds}{k\,dz}$: or lorſque la ligne pV tombe ſur pZ, & que l'Axe de rotation (qui paſſe par V) eſt perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, comme on le ſuppoſe, on a $pV \times pR = 1$, & $pV = \frac{1}{pR} = \frac{y}{\sqrt{[1-yy]}}$. Donc $\frac{y}{\sqrt{[1-yy]}} = \frac{y\,ds}{k\,dz}$; donc $ds = \frac{k\,dz}{\sqrt{[1-yy]}} = \frac{k\,dz}{\text{Sin. }\pi}$; donc pour que l'extrémité de l'Axe de la terre décrivît un cercle parallele au plan de l'Ecliptique, il faudroit que ds fût $= \frac{k\,dz}{\text{Sin. }\pi}$; mais nous venons de voir un peu plus haut, qu'il faudroit auſſi que ds fût $= \frac{k\,dz}{\text{Sin. }\pi} \times \frac{2K}{M+K}$: or ces deux expreſſions de ds ne peuvent être égales que dans le cas de $M = K$; c'eſt-à-dire lorſque la terre eſt un globe. Donc &c.

On peut auſſi démontrer d'une autre maniére que $d\varepsilon$ devroit être $= \frac{k\,dz}{\text{Sin. }\pi}$, ſi l'extrémité de l'Axe de la terre décrivoit un cercle parallele à l'Ecliptique : pour cela, on remarquera que dans cette hypotheſe le même diamétre de l'Equateur ſe trouveroit toujours ſur le plan de l'Ecliptique ; d'où il s'enſuit, que l'angle que nous avons nommé dP (*art.* 28) ſeroit $= 0$; or dP (*art.* 44) $= -d\varepsilon\sqrt{[1-yy]} + k\,dz$: donc $d\varepsilon = \frac{k\,dz}{\sqrt{[1-yy]}} = \frac{k\,dz}{\text{Sin. }\pi}$.

REMARQUE VI.

77. On a trouvé la ligne $pV = \frac{y\,d\varepsilon}{k\,dz\,\text{Cof. }x} = \frac{\sqrt{[d\pi^2 + y^2\,d\varepsilon^2]}}{k\,dz}$: or cette ligne eſt la tangente de l'angle que fait l'Axe de rotation avec l'Axe de la terre ; d'où il eſt aiſé de voir que cet angle ſera abſolument inſenſible. Car $k = -365\frac{1}{4}$, & $\sqrt{[d\pi^2 + y^2\,d\varepsilon^2]}$ eſt $< y\,d\varepsilon + d\pi$. Or la plus grande valeur de $d\varepsilon$ ſuivant la Théorie, eſt $\frac{dz}{6.12.360} + \frac{9''}{57^\circ} \times (n - M) \times \frac{-\text{Cof. }2\varpi}{\text{Sin. }\varpi\,;\,\text{Cof. }\varpi} = \frac{dz}{6.12.360} + \frac{1}{60.60.6\frac{1}{3}} \times (n-M) \times \frac{-\text{Cof. }2\varpi}{\text{Sin. }\varpi} \times \frac{1}{\text{Cof. }\varpi}$; & la plus grande valeur de $d\pi$, eſt $\frac{1}{60.60.6\frac{1}{3}} \times (n-M)$; donc à cauſe de $-\frac{\text{Cof. }2\varpi}{\text{Sin. }\varpi^2} = \frac{3}{4}$ (*art.* 60) & de $\text{Cof. }\pi = \frac{4}{10}$,

on aura $\frac{y\,de + d\pi}{k\,dz}$, ou $\frac{de\,\text{Cos.}\,\pi + d\pi}{k\,dz} = \frac{-1}{6 \cdot 12 \cdot 360 \cdot 365\frac{1}{4}} \times$

$\frac{2}{5} - \frac{3 \cdot 9}{18 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 6\frac{1}{3} \cdot 365\frac{1}{4}} - \frac{1}{18 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 6\frac{1}{3} \cdot 365\frac{1}{4}}$. Donc la tangente de l'angle dont il s'agit ſera ſi petite, qu'elle ſera abſolument inſenſible. Il n'eſt donc point ſurprenant que l'action du Soleil & de la Lune ſur la terre, ne change point ſenſiblement l'Axe de rotation ni le Pôle de rotation.

On verra de même par l'équation $dP = -de \times V[1 - yy] + k\,dz$, que l'action du Soleil & de la Lune ne produira aucune inégalité ſenſible dans la rotation de la terre. Car, ſuivant cette valeur de dP & la précedente valeur de de, la plus grande inégalité ſera à peu près $15'' \times$ Sin. ϖ = environ $13''$. Or $13''$ de degré ne ſont pas une ſeconde de tems.

Au reſte, il eſt bon d'obſerver que nous ne parlons ici que de la rotation de la terre autour de ſon *Axe de figure*, & non pas autour de ſon vrai *Axe de rotation* qui change à chaque inſtant, quoiqu'il ſoit toujours fort près de l'autre. On prouvera plus bas que la rotation autour de ce dernier Axe eſt, ſi on peut parler ainſi, encore plus ſenſiblement uniforme.

REMARQUE VII.

78. Nous avons vû ci-deſſus, que la diſtance du point V (Figure 34) à l'Ecliptique, eſt $\frac{de\,\text{Cos.}\,\pi^2 + k\,dz\,\text{Sin.}\,\pi}{k\,dz}$;

or comme pV eſt une quantité très-petite, le point V eſt extrêmement près du point où l'Axe de rotation coupe la terre; donc on peut prendre $\frac{dz\,\text{Cof.}\,\pi^2 + kdz\,\text{Sin.}\,\pi}{kdz}$ pour la diſtance de l'extrémité de l'Axe de rotation, ou du *Pôle de rotation*, au plan de l'Ecliptique. Donc nommant cette diſtance $V[1 - y'y']$, on aura au lieu de l'équation Y, celle-ci . . . . . .

$$(A') \ldots\ldots d(V[1 - y'y']) = \frac{3Adz\,\text{Sin.}\,2v\,.\,\text{Cof.}\,\pi^2}{2K\,.\,k} + \frac{3A(1+C)\,dz\,\text{Sin.}\,2v'\,.\,\text{Cof.}\,\pi^2}{2K\,.\,k} - \frac{3A(1+C)\,m'\zeta\,\text{Sin.}\,v'\,.\,\text{Cof.}\,\pi\,.\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,dz}{K\,.\,k}$$

REMARQUE VIII.

79. Il eſt clair que l'angle entre l'Axe de figure & l'Axe de rotation eſt ſenſiblement égal à $\frac{ydz}{kdz\,\text{Cof.}\,X} = \frac{V[d\pi^2 + yydz^2]}{kdz}$ qui en eſt la tangente; or cet angle eſt à l'angle compris entre la projection de l'Axe de figure & celle de l'Axe de rotation, comme $\frac{pV}{1}$ eſt à $\frac{pO}{y}$; c'eſt-à-dire (à cauſe de $pO = pV\,\text{Sin.}\,X$) :: y : Sinus X :: 1 : $\frac{-d\pi}{\text{Cof.}\,\pi\,.\,V[d\pi^2 + yydz^2]}$; je mets $-d\pi$,

parce que π eſt ſuppoſé aller en diminuant, & y en augmentant ; donc l'angle compris entre les deux projections $= \frac{-d\pi}{\text{Cof. } \pi \,.\, k\,dz}$. Donc comme $d\pi^2$ eſt d'un ordre conſidérablement moindre que $dd\pi$, on peut prendre $-\frac{dd\pi}{\text{Cof. } \pi \,.\, k\,dz}$ pour l'accroiſſement de l'angle entre les deux projections : & puiſque la projection de l'Axe de figure eſt ſuppoſée décrire l'angle $d\epsilon$, on aura $-\frac{dd\pi}{\text{Cof. } \pi \,.\, k\,dz} + d\epsilon$ pour l'expreſſion de l'angle que décrit à chaque inſtant ſur le plan de l'Ecliptique la projection de l'Axe de rotation. Donc nommant cet angle $d\epsilon'$, & négligeant dans l'équation Z le terme $-d\epsilon^2 \times$ Sin. π . Cof. π, qui eſt évidemment nul par rapport à $k\,d\epsilon\,dz$ Cof. π, on aura . . . . . .

$$(B') \ldots -d\epsilon' = \frac{3A \text{ Cof. } v^2 \,.\, dz \text{ Sin. } \pi}{K \,.\, k}$$

$$+ \frac{3A \,.\, \text{Cof. } v^2\, dz \text{ Sin. } \pi\,(1+\zeta)}{K \,.\, k}$$

$$- \frac{3A\,dz\,(1+\zeta)\,m'\zeta \text{ Cof. } v' \times - \text{Cof. } 2\pi}{K \,.\, k \text{ Cof. } \pi}$$

On peut donc par le moyen de cette équation & de celle de l'*article* 78 précedent, déterminer la poſition inſtantanée de l'Axe de rotation de la terre, en la regardant comme un globe ; & cet Axe différe très-peu (*article* 77) de ſon Axe de rotation réel. Nous déterminerons dans la ſuite par une autre méthode cet Axe

de rotation, & nous verrons que le réſultat ſera parfaitement d'accord avec le précedent.

CHAPITRE IX.

Conſéquences qui réſultent de la Théorie précedente, par rapport à la figure de la Terre.

80. NOUS avons trouvé ci-deſſus *article* 44, qu'en regardant la terre comme un Sphéroide Elliptique ſolide & homogene, on a $3A = \frac{3 \cdot 4 \alpha a^5}{15}$, & M ou $K = \frac{4 a^5}{15}$. Donc ſi on ſuppoſe que la terre ſoit un ſolide compoſé de couches Elliptiques différentes, dont les rayons ſoient f, les Ellipticités $F\alpha$, F étant une fonction quelconque du rayon f, & Δ les denſités, on aura $\frac{3A}{K} = \frac{3 \cdot 4}{15} \times \frac{\int \Delta d (F f^5 \alpha)}{\frac{4}{15} \int \Delta d (f^5)} = \frac{3 \int \Delta d (f^5 F \alpha)}{\int \Delta d (f^5)}$, $\int \Delta d\ (f^5 F)$ & $\int \Delta d\ (f^5)$ étant toujours ſuppoſées être les intégrales complettes qui répondent à $f = 1$, & $F = 1$. Or ſi on nomme φ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'Equateur, on trouvera facilement par les formules que M. *Clairaut* a données dans ſon Livre *de la Figure de la Terre*, $\alpha = \frac{5 \varphi \int \Delta d (f^3)}{10 \int \Delta d (f^3) - 6 \int \Delta d (f^5 F)}$: car M. *Clairaut*, page 226 de cet Ouvrage, trouve $10 A \delta - 2D = 5 A \varphi$, δ étant ce que nous appellons

ici α, A étant $= \int \frac{\Delta d(f^3)}{3}$, & $D = \int \Delta \alpha d(f^5 F)$. Cela posé, on a (*art.* 52) $\frac{3A}{2K} \times \frac{(2+6) \times \text{Sin.}}{-k} = \frac{1}{6.12.360}$; donc à cause de $2+6 = 3+\frac{1}{3}$ (*article* 54) de $k = -365\frac{1}{4}$, de Sin. $\varpi = \frac{9}{10}$, on aura $\frac{3A}{K} = 365\frac{1}{4} \times \frac{10}{9} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{3.12.360} =$ à très-peu près $\frac{1}{3.3.12}$. Donc $\frac{\int \Delta d(f^5 F\alpha)}{\int \Delta d(f^5)}$ est $= \frac{1}{3.3.3.12}$, c'est-à-dire (α étant égal à $\frac{1}{174}$ par les opérations faites en Laponie & au Perou) que $3\int \Delta d(f^5 F)$ est une quantité $= \frac{174}{3.3.12} \times \int \Delta d(f^5)$; si la terre est un solide composé de couches Elliptiques quelconques, peu éloignées de la figure Sphérique: or je dis, & je vais démontrer tout à l'heure, que si $3\Delta d(f^5 F)$ est égale à $\frac{174}{3.3.12} \times \int \Delta d(f^5)$, on aura $\int 3\Delta d(Ff^5) < \frac{174}{3.3.12} \times \frac{5}{3} \times \int \Delta d(f^3)$; d'où il s'ensuivra que α sera plus petit que la fraction suivante $[5\varphi \int \Delta d(f^3)] : [10 \int \Delta d(f^3) - \frac{174.10}{3.3.12.3} \times \int \Delta d(f^3)]$, c'est-à-dire (à cause de $\varphi = \frac{1}{289}$) que α sera $< \frac{1}{578}$: $[1 - \frac{174.10}{3.12.10.3.3}]$ ou $\alpha < \frac{1}{256}$: ce qui est très-éloigné

gné des obſervations qui donnent $\alpha = \frac{1}{174}$; de-là nous conclurons que la terre ne peut être regardée comme tout-à-fait ſolide, & formée de couches Elliptiques.

81. Pour démontrer que $3\int\Delta d(f^5 F)$ eſt plus petit que $\frac{174\times 5}{3\cdot 3\cdot 12\cdot 3}\int\Delta d(f^3)$, la queſtion ſe réduit à prouver que $\int\Delta d(f^5)$ eſt plus petit que $\frac{5}{3}\int\Delta d(f^3)$; car alors $3\int\Delta d(f^5 F)$ ſera auſſi plus petit que $\int\Delta d(f^3)\times \frac{178\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 12}$, puiſque (*art.* 80) $3\int\Delta d(f^5 F) = \frac{174}{3\cdot 3\cdot 12}\times \int\Delta d(f^5)$: or je diſtingue cette propoſition en trois cas. 1°. Celui où Δ va toujours en diminuant du centre à la circonférence. 2°. Celui où Δ va en augmentant. 3°. Celui où Δ va tantôt en diminuant, & tantôt en augmentant.

Premier cas. Soit AD (Fig. 35) $= 1$, la plus grande valeur de f, & ſoient BEC, BFC, deux courbes, dont la premiere ait pour abſciſſes & pour ordonnées correſpondantes, des lignes égales à f^5 & à Δ (enſorte que AG, par ex. étant $= f^5$, on ait $GE = \Delta$,) & dont la ſeconde ait pour abſciſſes & pour ordonnées des lignes $=$ à f^3 & à Δ : les ordonnées Δ de chacune de ces courbes iront en diminuant de A en D, puiſque Δ va en diminuant (*hyp.*) depuis $f = 0$ juſqu'à $f = 1$. (Il eſt inutile d'obſerver que f^5 & f^3 ſont ici ſuppoſées diviſées par une puiſſance convenable de AD, qui repréſente l'unité). Cela poſé, on voit que $\int\Delta d(f^5)$ ſera l'aire

$ABCDE$, & que $\int \Delta d\,(f^3)$ ſera l'aire $ABFCD$. Donc ſi je puis prouver que $\int \Delta d\,(f^1)$ eſt $< \int \Delta d\,(f^3)$, on aura à plus forte raiſon $3\int \Delta d\,(f^1) < 5\int \Delta d\,(f^3)$; la difficulté ſe réduit donc à faire voir que la premiere de ces deux aires eſt plus petite que l'autre. Or menant EF parallele à AD, les abſciſſes AH, AG qui répondent à des ordonnées égales GE, HF ſont entr'elles comme f^3 à f^1. Donc tant que f ſera < 1, on aura $AH > AG$, donc la courbe AEC eſt toute entiere au-dedans de la courbe AFC. Donc &c.

On peut remarquer que ce premier cas, eſt celui qui a été ſuppoſé juſqu'à préſent par tous ceux qui ont traité de la Figure de la Terre; & en effet, il eſt aſſez vraiſemblable que les couches voiſines du centre ſont les plus denſes, quoique cela ne ſoit pas abſolument néceſſaire, lorſque les couches ſont ſuppoſées ſolides. Or dans ce premier cas, on vient de trouver que $\int \Delta d\,(f^1)$ eſt plus petit, non-ſeulement que $\frac{5}{3}\int \Delta d\,(f^3)$; mais que $\int \Delta d\,(f^3)$: d'où l'on peut conclure que α ſera dans cette hypotheſe beaucoup plus petit que $\frac{1}{256}$; & par conſéquent encore plus éloigné du rapport obſervé $\frac{1}{174}$.

Second cas. Soient comme dans le cas précedent les courbes BEC, (Figure 36) BFC, dont les ordonnées GE, HF, vont maintenant en augmentant de A en D, & ſoit pris $FO = \frac{3}{2}\,FE$, on aura l'aire $BOCFB =$

$\frac{3}{2}$ $BFCEB = \frac{3}{2}$ $ABECD - \frac{3}{2}$ $ABFCD = \frac{3}{2} \times$ $\int \Delta d(f^3) - \frac{3}{2} \int \Delta d(f^3)$. Or je dis qu'il s'enſuit de-là, que $\int \Delta d(f^3) < \frac{5}{3} \int \Delta d(f^3)$. Pour le faire voir, je remarque qu'il ſuffit de prouver que $FO < FK$, ou au moins n'eſt jamais plus grand ; car alors $BOCFB$ ou $\frac{3}{2} \int \Delta d(f^3) - \frac{3}{2} \int \Delta d(f^3)$ ſera $< ABFCD$, c'eſt-à-dire que $\int \Delta d(f^3)$. Or $FK = 1 - f^3$; FO ou $\frac{3}{2} FE = \frac{3}{2} f^3 - \frac{3}{2} f^5$; il faut donc prouver que $1 - f^3 > \text{ou} = \frac{3}{2} f^3 - \frac{3}{2} f^5$, c'eſt-à-dire que $1 > \text{ou} = \frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$. Or lorſque $f = 1$, on a $1 = \frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$; & lorſque $f = 0$, on a $1 > \frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$: la queſtion ſe réduit donc à prouver que $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$ va toujours en diminuant depuis $f = 1$ juſqu'à $f = 0$, ou, ce qui eſt la même choſe, toujours en augmentant depuis $f = 0$ juſqu'à $f = 1$, ou, ce qui eſt encore la même choſe, que la différence $\frac{15f^2 df - 15f^4 df}{2}$ de cette quantité eſt toujours poſitive, ou au moins n'eſt jamais négative, tant que f ne paſſe pas 1 : or cela eſt évident ; car ſi $f = 0$, on a $15f^2 df - 15f^4 df = 0$, & ſi f eſt une fraction, on a $15f^2 df > 15f^4$. Donc &c. Donc $3 \int \Delta d(f^3)$ eſt plus petit que $5 \int \Delta d(f^3)$. *Ce Q. F. D.*

On peut démontrer d'une autre maniére & ſans figure, que ſi les denſités Δ vont en augmentant depuis $f = 0$, juſqu'à $f = 1$, $\int \Delta\, d(f^5)$ ſera toujours $< \frac{5}{3} \times \int \Delta\, d(f^3)$. Car $\frac{3}{2} \int \Delta\, d(f^5) - \frac{3}{2} \int \Delta\, d(f^3) = -\frac{3\Delta}{2} \times (f^3 - f^5) + \int \frac{3d\Delta}{2} (f^3 - f^5) = \int \frac{3d\Delta}{2} (f^3 - f^5)$, lorſque $f = 1$: or $\int \Delta\, d(f^3) = \Delta f^3 - \int d\Delta \cdot f^3 = \Delta' - \int d\Delta (f^3)$, lorſque $f = 1$, en nommant Δ' la denſité à la ſurface de la terre : il faut donc prouver que $\int \frac{3d\Delta}{2} \times (f^3 - f^5) < \Delta' - \int d\Delta\, (f^3)$, ou que $\int d\Delta \left(\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}\right) < \Delta'$. Or tant que f eſt < 1, on a $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2} < 1$, & lorſque $f = 1$, on a $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2} = 1$, comme on l'a vû tout à l'heure. Donc $\int d\Delta \left(\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}\right) < \int d\Delta$, c'eſt-à-dire $< \Delta' - \Delta''$, Δ' étant la denſité à la ſurface de la Terre, & Δ'' la denſité au centre. Donc à plus forte raiſon $\int d\Delta \left(\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}\right) < \Delta'$. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

En général, il eſt évident par cette démonſtration, que plus le rapport de $\int \Delta\, d(f^5)$ à $\int \Delta\, d(f^3)$ approchera de l'unité & s'éloignera du nombre $\frac{5}{3}$, plus

α ſera au-deſſous de $\frac{1}{256}$, & par conſéquent au-deſſous de $\frac{1}{174}$: ſoit donc $n\int\Delta d(f^1) - n\int\Delta d(f^3) = q\int\Delta d(f^3)$, Δ allant toujours en augmentant du centre à la circonférence; il faut que $\frac{n+q}{n}$ ſoit < 2, $n+q$ & n étant des nombres poſitifs. On a $n\int\Delta d(f^1) - n\int\Delta d(f^3) = n\int d\Delta\,(f^3 - f^1)$, lorſque $f = 1$, & $q\int\Delta d(f^3) = q\Delta' - q\times\int d\Delta\,(f^3)$: or pour que $\int f^3 d\Delta(n+q) - \int d\Delta \,.\, nf^1$ ſoit $< q\Delta'$, il faut que $(n+q)f^3 - nf^1$ ne ſoit jamais $> q$, c'eſt-à-dire que $3(n+q)$ ne ſoit jamais plus petit que $5n$: de-là il s'enſuit que $q = \frac{2n}{3} + \frac{\delta}{3}$, δ étant une quantité poſitive ou zero. De plus, $\frac{q+n}{n}$ devant être < 2, il faut que $\frac{q}{n}$ ſoit < 1. Donc $\frac{2}{3} + \frac{\delta}{3n} < 1$; donc la plus petite valeur de $\frac{q+n}{n}$, eſt celle ou $\delta = 0$, c'eſt-à-dire où $q = \frac{2n}{3}$; & c'eſt l'hypotheſe dont nous nous ſommes ſervis. Cependant il pourroit ſe faire, que ſi on prenoit $n\int\Delta d(f^1) - p\int\Delta d(f^3) = q\int\Delta d(f^3)$ p, q, n étant trois indéterminées, on trouvât $\int\Delta d(f^1)$ encore plus petit que $(\frac{5}{3} - 6)\int\Delta d(f^3)$, 6 étant un nombre poſitif; d'où l'on tireroit l'Ellipticité α encore plus petite, & par conſéquent plus éloi-

gnée de la véritable : mais comme cette recherche ne m'eſt point néceſſaire ici, je la laiſſe à faire à d'autres.

On ne ſçauroit donc regarder la terre comme un Sphéroide ſolide, compoſé de couches Elliptiques d'une épaiſſeur infiniment petite, dont la denſité aille toujours en croiſſant ou en diminuant de la circonférence au centre : je dis, de plus, qu'on ne ſçauroit ſuppoſer que ces couches ſoient d'une épaiſſeur finie, la denſité ſuivant d'ailleurs telle loi qu'on voudra ; car ſoient leurs épaiſſeurs finies, & que $\alpha F'$, $\alpha F''$, $\alpha F'''$ &c. ſoient leurs Ellipticités, f', f'', f''' &c. leurs rayons, & δ', δ'', δ''' &c. leurs denſités, on aura 1°. au lieu de $\int \Delta\, d(Ff^5)$ la quantité $F'\delta' f'^5 + F''\delta''(f''^5 - f'^5) + F'''\delta'''(f'''^5 - f''^5)$ &c. 2°. au lieu de $\int \Delta\, d(f^3)$ la quantité $\delta' f'^5 + \delta''(f''^5 - f'^5) + \delta'''(f''' - f''^5)$ &c. 3°. au lieu de $\int \frac{5\Delta}{2}\, d(f^3)$ la quantité $\frac{5\delta' f'^3}{2} + \frac{5\delta'}{2} \times (f''^3 - f'^3) + \frac{5\delta'''}{2} \times (f'''^3 - f''^3)$ &c. Or f', f'', f''' &c. n'étant jamais > 1 ; il s'enſuit 1°. que $\frac{5}{3}\delta' f'^3 > \delta' f'^5$; 2°. que $\frac{5\delta''}{3}(f''^3 - f'^3) > \delta''(f''^5 - f'^5)$; car f'' étant $> f'$ (*hyp.*), on aura $\frac{5f''^3}{2} - \frac{3f''^5}{2} > \frac{5f'^3}{2} - \frac{3f'^5}{2}$, puiſque nous avons prouvé que $\frac{5f^3}{2} - \frac{3f^5}{2}$ alloit toujours en augmentant depuis $f = 0$ juſqu'à $f = 1$, &c. Donc

en général $\int \Delta d(f^1) < \frac{1}{3} \int \Delta d(f^3)$, quelle que ſoit l'épaiſſeur des couches, & la loi de leurs Ellipticités & de leurs denſités.

Troiſiéme cas. Ce que nous venons de démontrer pour le cas où les couches ſont d'une épaiſſeur finie, s'applique viſiblement au cas où elles ſont d'une épaiſſeur infiniment petite.

Donc en général, *on ne ſçauroit regarder la terre comme un Sphéroide ſolide, compoſé de couches Elliptiques peu éloignées de la figure Sphérique, quelles que ſoient les denſités, les Ellipticités & les épaiſſeurs de ces couches; cette ſuppoſition ne pouvant ſe concilier à la fois avec la quantité connue de la préceſſion des Equinoxes, & la quantité, auſſi connue, de l'applatiſſement de la terre.*

REMARQUE II.

82. Mais ſi on ſuppoſe la terre en partie ſolide, & en partie fluide, ainſi qu'elle l'eſt réellement, on pourra accorder le Phenomene de la préceſſion des Equinoxes avec la figure de la terre, telle que les obſervations la donnent. Car pour déterminer le mouvement de l'Axe de la terre, on ne doit point avoir égard à la partie fluide; le mouvement que l'action du Soleil & de la Lune produiroit dans cette partie, ne ſeroit autre choſe que le *Flux & Reflux*, & ne cauſeroit aucun déplacement dans les parties ſolides du globe. Pour rendre cette vérité ſenſible, ſoit S (Fig. 37) le Soleil,

PEpe un Méridien de la terre ; ſuppoſons que le centre *C* ſoit en repos, que la terre ſoit fluide avec un noyau Sphérique ſolide au centre, & qu'elle ait pris la figure qu'elle doit avoir en vertu de ſa rotation autour de ſon Axe, & de l'action du Soleil : il eſt viſible qu'une particule quelconque *O* du fluide ſera également preſſée en tout ſens ; elle eſt donc dans le même cas, que ſi aucune force n'agiſſoit ſur elle ; ainſi l'action du Soleil ſur les différentes parties de la terre, ne peut produire aucun déplacement dans la maſſe totale ; & quand on ne ſuppoſeroit pas que la terre fût parvenue à ſa figure conſtante, il eſt certain que ſi le Soleil étoit en repos, ſon action ne feroit qu'exciter dans les eaux un mouvement d'oſcillation, dont j'ai déterminé les loix ailleurs (†).

Imaginons donc maintenant, pour fixer les idées, que la terre conſiſte en un noyau ſolide Elliptique homogene, dont l'Ellipticité ſoit α, & recouvert pardeſſus d'une couche fluide dont l'épaiſſeur ſoit fort petite par rapport à celle du noyau, & dont l'Ellipticité ſoit α', qui eſt celle qui a été trouvée par les obſervations, on aura $\alpha' = \frac{1}{174}$ & $\alpha < \frac{1}{256}$: maintenant ſoit δ la denſité du fluide, Δ celle du noyau, & φ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'Equateur, on trouve, comme je l'ai montré dans mes Recherches ſur la cauſe des Vents $\alpha' = [\frac{\varphi}{2} + \frac{3m}{5}(\frac{\Delta - \delta}{\Delta})][:]1 - \frac{3\delta}{5\Delta}]$;

(†) *Réflexions ſur la cauſe des Vents.* 1746.

donc

donc $\frac{1}{174} - \frac{3\delta}{5\Delta}\left(\frac{1}{174}\right) = \frac{1}{578} + \frac{3\alpha}{5} - \frac{3\alpha\delta}{5\Delta}$; donc $\frac{\delta}{\Delta} =$

$\left[\frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{174} - \frac{1}{578} - \frac{3\alpha}{5}\right)\right] : \left(\frac{1}{174} - \alpha\right)$; or α étant $< \frac{1}{256}$,

(*art.* 81) on voit que la valeur de $\frac{\delta}{\Delta}$ eſt poſitive ainſi qu'elle le doit être, & qu'on aura par cette équation le rapport qui doit être entre la denſité de la partie fluide & celle de la partie ſolide, pour que le Phenomene de la préceſſion des Equinoxes s'accorde avec le Phenomene de la figure de la Terre.

Je ne prétends pas, au reſte, que la ſtructure intérieure de la Terre, ſoit telle que je viens de la déterminer. J'ai voulu ſeulement montrer, par l'exemple le plus ſimple qu'il m'a été poſſible de choiſir, que la figure de la Terre peut s'accorder avec la préceſſion des Equinoxes, ſi on ſuppoſe qu'une partie de la terre ſoit fluide.

CHAPITRE X.

Eclairciſſement ſur une difficulté qui peut ſe préſenter dans la ſolution générale du Problême.

83. IL me ſemble qu'il ne doit y avoir aucune difficulté ſur la maniére dont nous avons intégré par approximation les équations Y & Z (*art.* 45), pour trouver la préceſſion annuelle des Equinoxes & la nuta-

tion de l'Axe de la terre ; on pourroit néanmoins, pour intégrer ces équations, s'y prendre d'une autre maniére, qui conduiroit, ce me ſemble, à des conſéquences très-différentes de celles que nous avons déduites dans les Chapitres précedens. Comme le paralogiſme en ſeroit aſſez ſubtil, je crois devoir l'expoſer ici, avec l'étendue néceſſaire.

Il eſt certain, que ſuivant les obſervations de M. *Bradley*, $\pi = \varpi - Q$ Cof. $n'z - Mz$, & $\epsilon = Mz + \frac{Q \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi} \times \text{Sin. } n'z - Mz$. Négligeant donc dans l'équation Y tous les termes où il ſe rencontre des Coſinus ou Sinus d'autres angles que $n'z - Mz$, elle ſe changera en celle-ci . . . . . :
$- 3A(1+\epsilon)\zeta m'$ Sin. v' Cof. π . Sin. $\pi . dz^2 = d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2) + d(k\,dz \text{ Sin. } \pi)$, dans laquelle on ne mettra au lieu de -2ζ Sin. v' que ſa valeur — Sin. $n'z - Mz$, trouvée *art.* 52. Donc à cauſe de $\frac{1}{\text{Cof. } \varpi^2} = \frac{1}{\text{Cof. } \varpi^2} - \frac{2Q \text{ Sin. } \varpi \text{ Cof. } n'z - Mz}{\text{Cof. } \varpi^3}$, & de Sin. π = Sin. ϖ — Cof. $\varpi \times Q$ Cof. $n'z - Mz$, on aura $d\epsilon = \frac{F\,dz}{\text{Cof. } \varpi^2} - \frac{k\,dz \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi^2} - dz \times \frac{2Q \text{ Cof. } n'z - Mz \text{ . Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi} \times \left(\frac{F - k \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \varpi^2}\right) + \frac{k\,Q\,dz \text{ Cof. } n'z - Mz}{\text{Cof. } \varpi} + \frac{3A\,dz}{2K} \times \frac{m'(1+\epsilon) \text{ Sin. } \varpi \text{ . Cof. } n'z - Mz}{\text{Cof. } \varpi (n' - M)}$,
F étant une conſtante ajoutée en intégrant, & qui dépend du rapport de $d\epsilon$ à dz, lorſque $z = 0$.

Maintenant, on obſervera que la préceſſion des Equinoxes étant de 50″ par an, on a $\frac{F}{\text{Cof. } \pi^2} - \frac{k \text{ Sin. } \pi}{\text{Cof. } \pi^2} = M = \frac{1}{6.12.360}$. De plus, on a trouvé (*art.* 43) $dP = -de \text{ Sin. } \pi + k\,dz$; mettant donc dans cette équation, pour de ſa valeur trouvée ci-deſſus, on aura $dP = (-F \text{ Sin. } \varpi + k) \times \frac{dz}{\text{Cof. } \pi^2}$, en négligeant les petits termes qui contiendroient le Coſin. de $n'z - Mz$; or quelle que ſoit la valeur de dP, il eſt certain (*art.* 52) que le terme conſtant doit être $-dz \times 365\frac{1}{4}$. Donc $\frac{F \text{ Sin. } \varpi - k}{\text{Cof. } \pi^2} = 365\frac{1}{4}$; de-là & de l'équation déja trouvée entre F & k, l'on tire aiſément $k = -365\frac{1}{4} + \frac{\text{Sin. } \pi}{6.12.360}$, & $F = -365\frac{1}{4} \text{ Sin. } \varpi + \frac{1}{6.12.360}$: l'on voit donc que k eſt un fort grand nombre négatif, étant à peu près $= -365\frac{1}{4}$, & que $\frac{F - k \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \pi^2} = \frac{1}{6.12.300}$; donc k eſt un très-grand nombre par rapport à $\frac{F - k \text{ Sin. } \varpi}{\text{Cof. } \pi^2}$, & par conſéquent on peut ſuppoſer $de = \frac{1}{6.12.360} dz + \left(\frac{3A(1+\epsilon) \text{ Sin. } \pi . m'}{\text{Cof. } \pi . 2K(n' - M)} + \frac{kQ}{\text{Cof. } \pi}\right) dz \text{ Cof. } n'z - Mz$. D'où

il eſt évident que $k\,dz$ eſt incomparablement plus grand que dt, & que par conſéquent les deux derniers termes du ſecond membre de l'équation Z peuvent ſe réduire à $k\,dt\,dz$ Cof. π ; donc en négligeant dans cette équation les termes qui renferment des Sinus & Coſinus d'autres angles que $n'z - Mz$, elle deviendra $dd\pi = \frac{3A(2+6)}{2K} \times$ Sin. π Cof. $\pi + \frac{k \text{ Cof. } \pi\, dz^2}{6.12.360} + k$ Cof. $\pi \times$ Cof. $n'z - Mz \times (+\frac{k\,Q}{\text{Cof. } \pi} + \frac{3A\,m'\,(1+6)\text{ Sin. } \pi}{2K \text{ Cof. } \pi\,(n'-M)}) +$ $\frac{3A\,(1+6)\,m'\,(1-2\text{ Cof. } \pi^2)}{2K}$ Cof. $n'z - Mz$, en mettant pour Sin. $\delta - U' + n'z - Mz$, ou Sin. $90° + n'z - Mz$ ſa valeur Cof. $n'z - Mz$. Suppoſant à préſent $\pi = \varpi + q$, & regardant q comme une quantité fort petite, on aura Sin. π Cof. $\pi = \frac{\text{Sin. } 2\pi}{2} + q$ Cof. 2ϖ ; Coſin. $\pi =$ Coſin. $\varpi - q \times$ Sin. ϖ. Soit donc fait $\frac{3A\,(2+6)\text{ Sin. } \pi\,.\,\text{Cof. } \pi}{2K} + \frac{k \text{ Cof. } \pi}{6.12.360} = -L$; $\frac{3A}{2K}(2+6) \times$ Cof. $2\varpi - \frac{k \text{ Sin. } \pi}{6.12.360} = -N^2$, & $+ k\,k\,Q +$ $\frac{m'k\,.\,3A\,(1+6)\text{ Sin. } \pi}{2K\,(n'-M)} = -R$, en négligeant le coefficient $3A\,(1+6) \times \frac{m'\,(1-2\text{ Cof. } \pi^2)}{2K}$ qui eſt nul par rapport aux autres, à cauſe de $k = -365\frac{1}{4}$, & de

$\frac{1}{n'-M}$ égal à environ 18 ; ce qui donnera l'équation

$ddq + N^2 q dz^2 + L dz^2 + R dz^2 \text{ Cos. } n'z - Mz = 0.$

Si on intégre cette équation par la Méthode que j'ai donnée *Mém. Acad.* 1745, en ſuppoſant $q = \delta$, & $\frac{dq}{dz} = n$ lorſque $z = 0$, on trouvera . . . . . $q = \frac{n}{N} \text{ Sin. } Nz + \delta \text{ Cos. } Nz + \frac{L \text{ Cos. } Nz}{NN} - \frac{L}{NN} - \frac{R \text{ Cos. } n'z - Mz}{NN-(n'-M)^2} + \frac{R \text{ Cos. } Nz}{NN-(n'-M)^2}$: or puiſque $\pi = \varpi + q$, ou $\varpi - Q \text{ Cos. } n'z - Mz$, il s'enſuit 1°. que ne ſuppoſant pas $N^2 = 0$, on aura $n = 0$, $L = 0$, d'où l'on tire $\frac{3A(2+6) \text{ Sin. } \varpi}{2K} = \frac{-k}{6.12.360}$, & $N^2 = \frac{k \text{ Sin. } \varpi}{6.12.360} + \frac{k \text{ Cos. } 2\varpi}{\text{Sin. } \varpi . 6.12.360} = \frac{k}{\text{Sin. } \varpi . 6.12.360} \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ Cos. } 2\varpi) = \frac{k \text{ Cos. } \varpi^2}{\text{Sin. } \varpi . 6.12.360}$, d'où l'on voit que N^2 eſt une fraction aſſez petite ; 2°. on aura $Q = \frac{R}{NN-(n'-M)^2}$, ou $Q(NN - n'n') = R$; de plus, δ doit être $= -Q$, puiſque δ eſt = à ce que devient q lorſque $z = 0$; 3°. $\delta + \frac{R}{NN-(n'-M)^2}$ doit être $= 0$; ce qui donne encore la même équation $Q(NN - n'n') = R$, ou $-Q \times (NN - n'n') = +kkQ - \frac{kk(1+6)m'}{6.12.360.(2+6) \times (n'-M)}$,

d'où l'on voit que $\frac{1+6}{2+6}$ ſera à peu près $= \frac{Q.(n'-M)}{m'} \times 6.12.360$, c'eſt-à-dire que $\frac{1+6}{2+6}$ ſera = à la même quantité que nous avons trouvée (*art.* 54). Mais comme dans cette hypotheſe, $2+6$ ſeroit $= 3 + \frac{1}{3}$, $\frac{3A}{2K} \times$ Sin. ϖ ſeroit $= \frac{-k}{6.12.360} \times \frac{3}{10}$, & comme $k =$ environ $-365\frac{1}{4}$, il s'enſuivroit que les termes que nous avons négligés ne devroient pas l'être ; car le terme par ex. qui renfermeroit Cof. $2z + 2Mz$, en faiſant $U = 0$, auroit pour coefficient $-\frac{3A.\text{Sin.}\varpi.\text{Cof.}\varpi.\text{Cof.}2z+2Mz}{2K(NN-4)}$ c. à d. environ $\frac{k \times \text{Cof.}\varpi}{6.12.360.4} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{60.40}$ à peu près : or ce coefficient eſt beaucoup plus grand que le coefficient Q, qui ſuivant les obſervations eſt $\frac{9''}{57°} =$ environ $\frac{1}{60.60.6\frac{1}{3}}$. Ainſi l'action du Soleil devroit produire dans l'Axe de la terre une nutation bien plus ſenſible que la Lune, ce qui ſeroit contraire aux obſervations.

Nous avons ſuppoſé dans le calcul précedent, que N^2 n'étoit pas $= 0$; voyons maintenant ce qui doit arriver ſi $N^2 = 0$. On aura en ce cas $ddq + Ldz^2 + Rdz^2$ Cof. $n'z - Mz = 0$; d'où il s'enſuit que L doit être $= 0$, autrement l'inclinaiſon de l'Axe varieroit

ſenſiblement au bout de quelques révolutions. Or en jettant les yeux ſur les valeurs de L & de N^2, on verra facilement que l'une étant $= 0$, l'autre ne le ſçauroit être. Donc la Méthode que je viens d'expoſer, donne des réſultats fort contraires au ſyſtême de l'Attraction, au lieu que les réſultats trouvés par la Méthode du Chapitre IV, ſont très-conformes à ce ſyſtême. Comment donc accorder tout cela ?

84. Pour trouver le dénouement de cette difficulté, on remarquera que les calculs des deux articles précedens, portent ſur une ſuppoſition tacite qui eſt fauſſe, ſçavoir que la quantité $d(d\varepsilon \text{ Cof. } \pi^2)$ ſoit du même ordre que la quantité $d(kdz \text{ Sin. } \pi)$; en effet, ſi on regarde la quantité $d(d\varepsilon \text{ Cof. } \pi^2)$ comme d'un ordre infiniment plus petit que $d(kdz \text{ Sin. } \pi)$, ainſi qu'elle l'eſt en effet, alors $d\varepsilon$ doit être traitée comme nulle dans la premiere des équations de l'*art.* 83, & cette équation ne doit point être comparée avec celle qui renferme la valeur de $d\varepsilon$ trouvée par les obſervations ; mais il faudra effacer dans l'équation tirée de la Théorie, les termes où ſe trouvent $d\varepsilon$ & F, comme étant nuls par rapport aux autres, & comparer l'équation reſtante avec celle qui donne la valeur de Sin. π, & qui réſulte des obſervations. Alors la Théorie & les obſervations ſeront d'accord, comme on l'a vû (*article* 52), & on trouvera que la ſolution conviendra avec celle de cet *art.* 52, ſur l'exactitude de laquelle ſa ſimplicité & ſa facilité ne doit laiſſer aucun doute. D'ailleurs on

remarquera, que ſuivant les formules A' & B' des *articles* 78 *&* 79 qui ont été déduites de cette ſolution, on trouve ſans aucune difficulté la nutation de l'Axe & la préceſſion des Equinoxes; or l'exactitude de ces formules A' & B' ſera confirmée dans le Chapitre ſuivant par une autre Méthode.

Au reſte, on voit par cet exemple combien il eſt facile de ſe tromper dans la ſolution des Problêmes, où on néglige de petites quantités; & combien, par conſéquent, on doit apporter de diſcernement dans le choix des moyens qu'on emploie pour les réſoudre.

Il eſt pourtant aſſez ſingulier que la Méthode fautive que nous venons d'expoſer, donne la même valeur de $\frac{1+\zeta}{2+\zeta}$ qui a été trouvée (*art.* 54) par une Méthode exacte. On peut encore trouver la même expreſſion, en comparant l'équation de dt tirée de la ſolution précedente, ſçavoir $\frac{kQ}{\text{Cof.}\,\varpi} - \frac{k\,(1+\zeta)\,m'}{(n'-M)\,\text{Cof.}\,\varpi\,(2+\zeta)\times(6.12.360)} \times$ Cof. $n'z - Mz$ avec l'équation $\frac{Q\,(n'-M)\,\text{Sin.}\,\varpi}{\text{Cof.}\,\varpi}$ tirée des obſervations. J'ai retrouvé encore la même choſe en intégrant les équations Y & Z, par une autre Méthode qu'il eſt inutile d'expoſer ici, parce qu'elle eſt fautive par la même raiſon que la précedente, quoique la valeur de $\frac{1+\zeta}{2+\zeta}$ qui en réſulte ſoit exacte.

CHAPITRE

CHAPITRE XI.

Autre méthode pour réſoudre le Problême de la préceſſion des Equinoxes.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

85. AVANT que de paſſer à cette ſeconde méthode, nous obſerverons qu'il a été démontré ci-deſſus 1°. que l'Axe de rotation inſtantanée de la terre eſt ſenſiblement le même (*art.* 77) que ſi la terre étoit un globe ; 2°. que les équations *Y* & *Z* de l'*article* 45, ſont celles qui conviennent au mouvement de la terre, dans l'hypotheſe qu'elle ſoit regardée comme un globe. Ainſi ces équations, auſſi-bien que les équations *A'* & *B'* des *articles* 78 *&* 79, qui en réſultent, peuvent être regardées comme ſuffiſantes pour déterminer l'Axe de rotation de la terre à chaque inſtant.

Nous allons donc dans les recherches ſuivantes conſidérer la terre comme un globe, & trouver par une nouvelle méthode la poſition de ſon Axe de rotation, & la viteſſe de rotation autour de cet Axe.

Il faut bien remarquer que nous ne regardons ici la terre comme un globe, que pour n'être pas obligés d'avoir égard à la petite différence inſenſible qui doit ſe trouver entre les deux Axes de rotation dans l'hypotheſe que la terre ſoit un globe, & dans l'hypotheſe qu'elle ſoit un Sphéroide. Car nous aurons égard d'ail-

leurs à la figure réelle de la Terre, en conſidérant l'action du Soleil & de la Lune qui altére à chaque inſtant ſon mouvement de rotation primitif.

Nous avons démontré (*art.* 1), que la direction de cette action eſt toujours dans le plan d'un Méridien ; par conſéquent la direction de cette action coupe l'Axe de la terre en quelqu'un de ſes points : de plus, cette direction eſt parallele (*art.* 1) à la ligne menée du centre de la Terre au centre du Soleil, ou de la Lune.

C'eſt pourquoi, comme l'Axe de la Terre ou du Sphéroide qui la forme eſt une ligne fixe & invariable, nous ſuppoſerons dans les recherches ſuivantes, que la Terre eſt un globe *PKpO* (Fig. 43) dans lequel il y a un diamétre ou ligne fixe *PCp*, dont quelque point *M* eſt toujours ſollicité ſuivant *BA* parallele à *CS*, par une force dont la quantité & dont la poſition ſont connues. Il eſt certain que quelque mouvement qu'on ſuppoſe à ce globe autour du centre *C*, il aura toujours à chaque inſtant un Axe de rotation (*art.* 72) ; que cet Axe demeureroit toujours le même, ſi la force ſuivant *BA* étoit nulle ; & que la viteſſe de rotation demeureroit auſſi toujours conſtante. Mais l'action de la force ſuivant *BA* produit néceſſairement quelque changement dans l'Axe de rotation & dans la viteſſe : changement qui eſt fort petit à chaque inſtant, ſi la force ſuivant *BA* eſt très-petite par rapport à la force de rotation. Nous allons déterminer la quantité de ce changement par le moyen des Propoſitions ſuivantes.

LEMME V.

86. *Soit un corps* PKO (Figure 38) *dont le centre de gravité ſoit* C, CQ *une ligne tirée à volonté par le centre* C, KCN *un plan perpendiculaire à* CQ ; *& ſoit menée dans ce plan une ligne perpendiculaire à* KN, *& que l'on prendra pour l'Axe du corps ; deſorte que* PKO *repréſente la ſection de ce corps par un plan perpendiculaire à l'Axe. Je dis que ſi tous les points* G *du ſolide ſont animés par une même force* φ *qui agiſſe ſuivant une direction parallele à* CQ, *& outre cela par des forces* GF, *dont la direction ſoit perpendiculaire aux diſtances des points* G *à l'Axe, & parallele au plan* PKO, *& qui ſoient proportionnelles à ces diſtances ; la direction de la force unique qui réſulte de toutes celles-là, ſera parallele à* CQ, *& que cette force ſera* $= \int G \times \varphi$, *c'eſt-à-dire ſera la même que ſi les forces ſuivant* GF *étoient nulles.*

Car ſi on décompoſe chacune des forces *GF* en deux autres, l'une ſuivant *GZ*, parallele au plan *KN*, l'autre ſuivant *GS* perpendiculaire à ce plan ; on verra que nommant π la force qui agit à la diſtance 1 du centre *C*, la force qui agit en *G* ſuivant *GF* ſera $\pi \times CG$, & que par conſéquent les forces ſuivant *GS* & *GZ*, ſeront $\frac{\pi . CG \times GS}{GI}$ & $\frac{\pi \times CG \times S^{I}}{GI}$, c'eſt-à-dire (à cauſe des triangles ſemblables *GCS*, *SGI*) $\pi . GV$, & $\pi . GS$. Or par la propriété du centre de gravité $\int \pi . G . GS = 0$. par conſéquent la force qui réſulte des forces ſuivant *GZ*

eſt nulle. Donc la force que nous cherchons, eſt la même que celle qui réſulte des forces des points G parallélement à CQ, & des forces GS des mêmes points G. Donc cette force a une direction parallele à CQ ou GS, & elle eſt égale à $\int\varphi . G + \int\pi . G . GV$: or $\int\pi . G \times GV = 0$ par la propriété du centre de gravité. Donc &c.

Coroll. I.

87. Soit PKO (Figure 39) un ſolide de révolution formé par la rotation d'une figure PRp autour d'une ligne Pp placée comme on voudra par rapport à la ligne CQ, & imaginons la ſection $PRpCQ$ qui paſſe par les lignes Pp & CQ; je dis que la direction BA de la force réſultante des forces φ & $\pi . CG$ ſera dans le plan $PRpCQ$.

Pour le démontrer, ſoit menée RC perpendiculaire à Pp; il faut décompoſer la force de rotation $\pi . CG$ de chaque particule en deux, l'une parallele à PC, l'autre parallele à RC; l'on verra d'abord que ces dernieres forces ont une direction parallele dans la partie RPO du ſolide, & comme le plan RPO diviſe cette partie en deux portions ſemblables & égales, la force réſultante de toutes ces forces ſera dans le plan RPO & perpendiculaire à PC; on prouvera par le même raiſonnement, que la force réſultante des forces paralleles à CP dans la partie RPO du ſolide, aura ſa direction dans le plan RPO, & ſera parallele à PC: il en ſera de même dans l'autre partie RpO; enfin, ſi on di-

viſe la force conſtante φ de chaque particule en deux autres forces φ' & φ'' paralleles à PC & à RC, on verra que les forces qui en réſultent dans chaque portion RPO, RpO, ſont l'une & l'autre dans le plan PKO : donc la force unique qui réſulte de toutes celles-là ſera dans le plan PKO.

Je ne parlerai dans la ſuite que des ſolides de révolution, je n'aurai même beſoin que du cas où ces ſolides ſont des globes, ou peuvent être conſidérés comme tels.

J'appellerai dorénavant la ſection PRp, faite par l'Axe Pp, *un Méridien.*

Corol. II.

88. Soit BMA (Fig. 38) la direction de la force qui réſulte de toutes celles des points G, & que je nomme F; je dis que $F \cdot CM$ ſera $= \int \pi \cdot G \cdot CG^2$. Car puiſque la force F que je ſuppoſe agir ſuivant BA réſulte de toutes les forces des points G, il s'enſuit que ſi au lieu de cette force on en ſuppoſoit une égale qui agît ſuivant AB, le corps PKO reſteroit en équilibre, & qu'il y reſteroit encore dans la même hypotheſe, ſi le point C ou l'Axe du corps étoit fixement attaché. Or dans ce dernier cas, la ſomme des momens des points G ſeroit $= \int G \cdot \varphi \cdot CS + \int G \cdot \pi \cdot CG \cdot CG =$ par la nature de l'équilibre, à $F \cdot CM$. or $\int G \cdot \varphi \cdot CS = 0$. Donc &c.

COROLL. III.

89. Donc ſi le corps PKO eſt animé par les forces dont nous avons parlé dans l'énoncé du Lemme précedent, il ne pourra être retenu en équilibre que par une force F qui ſoit égale à $\int \varphi . G$, qui agiſſe ſuivant AB dans le Méridien PKO parallélement à la direction de la force φ, & enfin dont la diſtance CM au point C, ſoit $= \frac{\int \pi . G . CG^2}{\int \varphi . G}$.

COROLL. IV.

90. Si le corps PKO (Figure 39) compoſé de quatre parties égales & ſemblables, PR, Rp, pO, OP, obéiſſoit à l'action des forces φ & $\pi . CG$, il ſeroit mû en ligne droite ſuivant CQ, & tourneroit en même tems autour de ſon Axe. Or nous venons de voir que la force F agiſſant ſuivant AB fait équilibre aux forces φ & $\pi . CG$, & retient le corps en repos. Donc ſi la force F agit ſuivant BA, elle produira deux mouvemens, l'un ſuivant CQ parallele à BA, tel que la force φ qui anime toutes les parties G, ſoit $\frac{F}{\int G}$, l'autre de rotation autour d'un Axe perpendiculaire au plan BMC ou MCQ, & qui ſera tel que la force de rotation π à la diſtance 1, ſera $= \frac{F . MC}{\int G . CG^2}$.

REMARQUE.

91. Nous croyons devoir faire à l'occaſion des propoſitions précedentes, quelques remarques qui ne ſeront point inutiles en elles-mêmes, quoique peu néceſſaires pour ce que nous avons à dire dans la ſuite.

Imaginons, comme dans l'*article* 87, un ſolide de révolution formé par la rotation de la figure RPp (Fig. 39) autour de Pp, & ſuppoſons que ce ſolide de révolution tourne autour d'un Axe perpendiculaire au plan PKO; ſuppoſons même pour rendre la choſe plus ſimple, que non-ſeulement PR ſoit = & ſemblable à PO, comme cela doit être néceſſairement, mais auſſi = & ſemblable à Rp. Il eſt certain que ce corps pourra tourner uniformément autour de ſon Axe de rotation, parce que les forces centrifuges des particules ſe détruiront mutuellement; & ſi on décompoſe ces forces en deux autres paralleles à RC & à CP, il eſt évident que ces nouvelles forces ſeront auſſi en équilibre, enſorte qu'elles ne produiront dans le corps aucun mouvement; auſſi trouvera-t-on facilement que la force réſultante des forces paralleles à RC eſt nulle, & qu'il en eſt de même de la force réſultante de celles qui ſont paralleles à CP. Cependant ſi on décompoſe de même les forces de rotation en forces paralleles à CP & à CR, on trouvera auſſi que chacune des forces réſultantes eſt nulle, & néanmoins cette *nullité* des forces réſultantes n'indique pas l'équilibre entre les forces de

rotation, puiſque les forces de rotation produiſent dans le corps un mouvement réel. Comment ſe peut-il faire que dans le premier cas il y ait équilibre entre les forces réſultantes, & que dans le ſecond il n'y en ait pas, quoïque dans l'un & l'autre cas la ſomme des forces réſultantes ſoit = 0?

Pour réſoudre cette difficulté, on n'a qu'à conſidérer un lévier ABD (Fig. 40) ſur lequel agiſſent les forces égales DE, AC; il eſt certain que quoiqu'il n'y ait pas d'équilibre entre les forces DE, AC cependant comme ces forces ſont égales & de directions contraires, la force qui en réſulte eſt nulle. Mais ſi ces forces étoient égales & de directions contraires, & outre cela dans la même ligne, comme ſont les forces centrifuges des points A, D, alors non-ſeulement la force réſultante ſeroit nulle, mais il y auroit équilibre entre ces forces. Il eſt aiſé d'appliquer cette remarque aux forces centrifuges & aux forces de rotation des parties d'un corps ſolide.

En général, pour que le lévier AB ſoit en équilibre, il faut que non-ſeulement la ſomme des forces appliquées en A & en B, ſoit = 0, mais encore que la ſomme de leurs momens ſoit = 0; or quand les deux puiſſances ont des directions contraires & ſont de différens côtés du point d'appui, alors une de ces puiſſances, & ſa diſtance au point d'appui ſont l'une & l'autre négatives; ainſi la ſomme des momens n'eſt pas = 0, mais elle eſt une quantité poſitive.

Voici

Voici encore une autre difficulté qui paroît mériter une ſolution. Nous ferons cette difficulté ſur le mouvement du lévier AD, parce que ce ſera la même choſe pour un corps ſolide. Si toutes les parties de ce lévier, outre le mouvement de rotation autour de B ont un mouvement $= BG$ perpendiculaire à AD, il eſt certain que pour avoir la force réſultante du mouvement de chaque partie, il faudra combiner la force qui réſulte du mouvement parallele à BG avec la réſultante du mouvement de rotation : or cette derniere force eſt $= 0$, & la premiere a pour direction BG. Pourquoi donc la force réſultante n'a-t-elle pas pour direction BG, mais une ligne bg qui eſt entre les points A & B, comme on doit le conclure des Lemmes précedens ?

En premier lieu, il eſt aiſé de voir que la force totale AK du point A étant plus grande que la force DO du point D, la force unique bg qui en réſulte, doit ſe trouver plus près de A que de D. Mais pour répondre d'une maniére plus directe à l'objection, on remarquera que les forces paralleles & égales AC, DE peuvent être cenſées concourir à une diſtance infinie a du point B dans la ligne BG infiniment prolongée, enſorte qu'on peut regarder les forces égales AC, DE, comme appliquées en a ſuivant aS & aQ, & faiſant des angles infiniment petits & égaux avec Ba. Or de ces deux forces égales, il réſulte une force infiniment petite dont la direction aP eſt perpendiculaire à Ba; enſorte que la force qui réſultera de la force ſui-

vant aP & de la force ſuivant BG, ſera un angle infiniment petit avec aB. Donc la direction de cette force ſera parallele à Ba, & viendra couper AB à une diſtance finie Bb du point B.

Coroll. V.

92. Si dans le plan PKO (Fig. 41) on ſuppoſe une force ba, que j'appelle F', & qui ſoit telle que $F' \times Cm = F \times CM$; cette force produira le même mouvement de rotation que la force BA. Il n'y aura de différence que dans la quantité & la direction du mouvement parallele que ces deux forces produiront. On peut donc ſubſtituer à la force BA une force ba qui agiſſe dans le même plan & qui ait le même moment, & une force qui paſſe par le centre C, & qui ait la valeur & la direction convenables. Ces deux forces réunies produiront abſolument le même effet que la force ſuivant BA; & ſi on veut n'avoir égard qu'au mouvement de rotation, on peut même faire abſtraction de la ſeconde. Cette remarque nous ſervira beaucoup dans la ſuite.

Je vais encore faire voir d'une autre maniére, que l'on peut ſubſtituer la force ſuivant ba à la force ſuivant BA, pour déterminer le mouvement de rotation que le corps PKO doit prendre autour du centre C. En effet, ſoit a (Fig. 42) le point où la direction de la force BA eſt coupée par la direction de la force ba; il eſt certain que ſi la force ba, au lieu d'agir de b

Digitized by Google

vers g agiſſoit de g vers b, & que le point C fût fixe, les forces ſuivant ab & ſuivant aA ou BA ſeroient en équilibre autour du point C, puiſque par l'hypotheſe ces forces ſont entr'elles en raiſon inverſe de leurs diſtances au point C; donc ſi on réduit les forces ſuivant ab, & ſuivant aA à une force unique, la direction de cette force doit paſſer par le point C, & ſera par conſéquent la ligne aC. Donc puiſque la force ſuivant aC réſulte des forces ſuivant ga & aA, on peut regarder la force ſuivant aA comme compoſée de la force ſuivant aC, & d'une force ſuivant ag, égale & contraire à la force ſuivant ga. Donc au lieu de la force ſuivant BA, on peut ſubſtituer la force ſuivant ba, & une autre force ſuivant aC. Or la direction de cette derniere force paſſant par le centre de gravité du corps, elle ne produira aucune rotation. Donc la rotation que les forces ſuivant BA & ſuivant ba, tendent à produire, ſera la même, & par conſéquent on peut à cet égard ſubſtituer une de ces forces à l'autre.

COROLL. VI.

93. De-là il s'enſuit, que ſi la terre conſidérée comme un globe tourne autour d'un de ſes diamétres quelconques Qq (Fig. 44), on pourra ſubſtituer à la force de rotation de chacune de ſes parties une force unique, qui agiſſe en tel point λ qu'on voudra du plan $LVlu$ perpendiculaire à l'Axe Qq, & dont la direction ſoit

perpendiculaire au rayon $C\lambda$, & ſoit dans le plan $LVlu$. A l'égard de la grandeur de cette force, elle dépendra de la force de rotation & de la longueur du lévier $C\lambda$, & nous la déterminerons plus bas; mais comme le rayon $C\lambda$ eſt arbitraire, nous ſuppoſerons pour ſimplifier les calculs, que le point λ tombe à l'extrémité L du rayon, enſorte que $CL = C\lambda$.

PROBLÈME VI.

94. *Soit* QLql (Fig. 45) *un des grands cercles d'un globe, & ſoit imaginée une force* L *appliquée au point* L *perpendiculairement au plan* QLql: *ſoient de plus appliquées en un point quelconque* R *du cercle* QLql *deux autres forces, l'une que j'appelle* R, *& qui ſoit perpendiculaire au plan* QLql, *l'autre que j'appelle* ϱ, *& qui agiſſe dans le plan* QLql, *ſuivant la direction de la tangente* RO; *on demande quel doit être l'Axe de rotation du corps.*

1°. Puiſque les forces R & L ſont paralleles l'une à l'autre, & perpendiculaires au plan QLq, on joindra la ligne LR; & faiſant $LH : HR :: R : L$, on pourra ſubſtituer au lieu des deux forces R, L une ſeule force au point H, laquelle ſoit $= R + L$ & perpendiculaire au plan QLq; 2°. au lieu de cette force placée en H, on pourra (*art.* 92) en ſubſtituer une autre placée en h, & qui ſoit $= \frac{(R+L)\times CH}{Cb}$; 3°. au lieu de la force ϱ qui agit ſuivant RO, on pourra ſubſtituer (*art.* 92)

une force qui agiſſe au point h perpendiculairement à Ch, & qui ſoit $= \frac{\varrho \times CR}{Ch} = \varrho$.

On a donc réduit les trois forces L, R, ϱ, à deux autres qui agiſſent ſur le point h, & dont les directions & les quantités ſont connues. Donc on réduira aiſément ces forces en une ſeule, dont on connoîtra la quantité & la direction; cela fait, on trouvera l'Axe de rotation par l'*art.* 90, car cet Axe ſera perpendiculaire au plan qui paſſe par le centre C, & par la direction de la force unique à laquelle les forces L, R, ϱ, auront été réduites.

COROLL. I.

95. Si les forces R & ϱ ſont très-petites par rapport à la force L, on aura $LH =$ à très-peu près $\frac{R \times LR}{L}$. Donc menant les perpendiculaires RV, HK, ou aura $CK = \frac{R \times CV}{L}$; & ſi le point R eſt en Q ou fort près du point Q, on aura $CK = \frac{R \times CQ}{L}$.

COROLL. II.

96. Si le point R (Fig. 46) eſt fort près du point Q, enſorte que l'angle LCR ſoit preſque droit; & qu'on mene dans le plan LCQ une ligne BCS ſur laquelle on abbaiſſe les perpendiculaires LB, HO, RS, on aura $BO = \frac{R \times BS}{L}$. Or nommant CS, y', on trouvera $BC =$

$\sqrt{[1-y'y']}$, & par conſéquent $BO = \frac{(y'+\sqrt{[1-y'y']})\times R}{L}$;

de même on aura en menant la parallele QI à BS, $LI = LB - QS = y' - \sqrt{[1-y'y']}$, & $Ll = \frac{LI\times R}{L} = \frac{R}{L}\times(y'-\sqrt{[1-y'y']})$.

COROLL. III.

97. Donc comme les lignes Ll & BO ou Hl ſont fort petites, on aura $CL - CH = \frac{Ll\times LB + BO\times CB}{CL} = \frac{R}{L}\times(y'y' - y'\sqrt{[1-y'y']} + y'\sqrt{[1-y'y']} + 1 - y'y') = \frac{R}{L}$. Donc Hh (Fig. 47) $= \frac{R}{L}$; donc $Oo = \frac{R}{L}\times\sqrt{[1-y'y']}$, & par conſéquent $Bo = \frac{Ry'}{L}$, & $Co = \sqrt{[1-y'y']} - \frac{Ry'}{L}$.

COROLL. IV.

98. Nous avons vû que la force appliquée en h perpendiculairement au plan CLQ, eſt $\frac{(R+L)\times CH}{Ch}$, donc cette force $= (R+L)\times(1-\frac{R}{L})$ à très-peu près.

COROLL. V.

99. Comme la force appliquée en h ſuivant la tangente de l'Arc hL eſt $= \varrho$, & qu'elle eſt regardée comme infiniment petite par rapport à la force appliquée

en h perpendiculairement au plan LCQ; il s'enſuit que la force réſultante de ces deux-là, doit être regardée comme égale à la ſeconde de ces deux forces, puiſqu'elle n'en différera que d'une quantité de l'ordre de ς^2, comme il eſt facile de le voir. Donc la force appliquée au point h peut être ſuppoſée $= (R + L) \times (1 - \frac{R}{L})$.

COROLL. VI.

100. Soit $uhCV$ (Fig. 48) le plan du grand cercle dans lequel ſe trouve la force qui agit ſur le point h, & imaginons que l'Ellipſe NoG ſoit la projection de ce grand cercle ſur un plan perpendiculaire à LCQ, enſorte que le grand Axe NG de cette Ellipſe, ſoit la commune ſection du plan BNS perpendiculaire à LCQ, & du plan du grand cercle $uhCV$. Cela poſé:

1°. Il eſt clair qu'on peut imaginer (*art.* 92) que la force qui agit ſur le point h, eſt appliquée en tout autre point Z de la circonférence de ce grand cercle.

2°. Soit Cz (Figure 49) le petit Axe de l'Ellipſe NoG, & Z le point du cercle uhV, dont le point z eſt la projection, on verra que les angles GCZ, ZCN, ſeront droits auſſi-bien que zCG, & zCN; & que ſi on mene une perpendiculaire CF au plan GZN, la projection CD de cette perpendiculaire ſera ſur la ligne zC prolongée vers D. D'où il eſt facile de conclure que l'angle FCD ſera le complément de l'angle ZCz, & que ſi on fait $CF = CZ = 1$, on aura $FD = Cz$.

COROLL. VII.

101. Il eſt viſible que le point *o* (Fig. 48) ſeroit la projection du point *h*, & que ce point *h* ſeroit le point de milieu d'un demi cercle qui auroit *Ch* pour rayon, & qui étant perpendiculaire au plan *LCQ*, ſe termineroit ſur le plan perpendiculaire à *LCQ* qui paſſe par *BS*; de plus, l'angle *Lhu* eſt preſque droit, parce que la force ſuivant *hL* eſt (*hyp.*) infiniment petite : donc le demi cercle dont nous venons de parler, fait un angle très-petit avec le cercle *uhV*. Or l'Ellipſe qui ſeroit la projection du premier de ces demi cercles, auroit *Co* pour petit Axe : donc le petit Axe *Cz* (Fig. 49) de l'Ellipſe *GzN* qui eſt la projection du ſecond de ces cercles, fait un angle infiniment petit avec *Co*. Donc *Cz* ne différe de *Co* que d'un infiniment petit du ſecond ordre ; donc on peut ſuppoſer $Cz = Co$; donc (*art.* 100), on aura $FD = Co$.

COROLL. VIII.

102. La ligne *CF* (*art.* 90) eſt l'Axe de rotation du corps, car cette ligne eſt perpendiculaire (*conſtr.*) au plan du grand cercle *GZN* dans lequel ſe trouve la force qui agit ſur le point *h*. Donc la diſtance *FD* qu'il y a de l'extrémité de l'Axe de rotation à $CD = Co = \sqrt{[1 - y'y']} - \frac{Ry'}{L}$; on a donc par cette propoſition, un des Elémens *FD* qui ſervent à déterminer la

la position de l'Axe de rotation. Il faut, de plus, trouver la position de Cz, ou, ce qui revient au même, l'angle oCz. C'est ce que nous allons déterminer par le moyen du Problême suivant, & de ses Corollaires.

PROBLÊME VII.

103. *Soit une demi Ellipse* GTS (Fig. 50), *qu'on peut regarder comme la projection d'un demi cercle* GpS *décrit du diamétre* GCS, *& dont le rayon* CS = 1; *on demande le rapport de l'Arc circulaire* Tt *décrit du centre* C, *à la différence* to *des lignes* CT, Co.

Ayant mené la perpendiculaire TV à GC, & nommé CT, y, Tt, dy, & l'angle GCT, v, on aura $TV = y$ Sin. v; & comme l'Ellipse est la projection d'un cercle GpS dont le rayon $Cp = 1$, il est évident, en menant la perpendiculaire Tp au plan GTS, & joignant pV, que l'angle pVT sera constant. Donc on aura $\frac{VT}{pT}$ constant, c'est-à-dire $\frac{y \text{ Sin. } v}{\sqrt{[1-yy]}} =$ à une constante. Donc différentiant & réduisant, on a $\frac{dy \text{ Sin. } v}{1-yy} = -ydv$ Cos. v : or $Tt = ydv$. Donc $\frac{to}{Tt}$ ou $\frac{dy}{dy} = \frac{-\text{Cos. } v\,(1-yy)}{\text{Sin. } v}$.

COROLL. I.

104. Donc si Co (Fig. 51) fait un angle très-petit

avec Cz, & que $\frac{to}{Tt} = p$, on aura $\frac{-\text{Cos. } GCo \times (1 - Cz^2)}{\text{Sin. } GCo} =$ p, c'eſt-à-dire, à très-peu près Sin. $zCo = \frac{p}{1 - Cz^2}$.

COROLL. II.

105. Donc pour trouver dans la Figure 52 l'angle entre Cz & Co, il ſuffit de connoître le rapport de Tt à to au point o. Or imaginant le triangle hMm dont l'hypothenuſe Mh ſoit infiniment petite, & regardant les points T, t, comme la projection des points M, m, on aura 1°. $Tt = Mm$; 2°. $to = \frac{hm \times bo}{bC} = hm \times y'$; 3°. $hm : Mm :: \varrho : (R + L) \times (1 - \frac{R}{L})$; c'eſt-à-dire à très-peu près $hm = \varrho \times \frac{Mm}{L}$. Donc $\frac{to}{Tt}$ ou $p = \frac{\varrho y'}{L}$; donc (*art. préced.*) l'angle zCo ou $\frac{p}{1 - Cz^2} =$ à très-peu près $\frac{\varrho}{Ly}$, parce que $Cz = \sqrt{[1 - y'y']}$ à très-peu près.

LEMME VI.

106 *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'article* 103, *je dis que ſi le point* p (Fig. 50) *du cercle* GpS, *dont le point* T *eſt la projection, eſt pouſſé perpendiculairement à* Cp *par une force proportionnelle au Sinus de* 2GCp, *le point* T *ſera pouſſé perpendiculairement à* CT *par une force proportionnelle au Sinus de* 2GCT *multiplié*

par CT, *c'eſt-à-dire qui ſera à la force du point* p *comme le Sinus de* 2GCT *multiplié par le Coſinus de l'angle* TCp *eſt au Sinus de* 2GCp.

Car ſoit *GCp* ou *PCS* = *V*, & *n* Sin. 2*V* la force qui pouſſe le point *p*, on aura *n* Sin. 2*V* = *n* Sin. *V* × 2 Cof. *V*, & cette force produira ſur le point *T* une force ſuivant *To* qui ſe décompoſera en deux autres *Tt*, & *to*: or le rapport du Coſinus de l'inclinaiſon, au Sinus total eſt $\frac{y \text{ Sin. } v}{\text{Sin. } V}$; & ce rapport eſt le même que celui du petit Secteur elliptique *TCt*, au Secteur circulaire correſpondant $\frac{1 \times dV}{2}$, dont *TCt* eſt la projection. Donc $Tt \times CT$ ou $y \times Tt = dV \times \frac{y \text{ Sin. } v}{\text{Sin. } V}$; mais la force ſuivant *Tt* eſt à la force du point *p* comme *Tt* à *dV*. Donc la force ſuivant $Tt = 2n \text{ Sin. } V \text{ Cof. } V \times \frac{\text{Sin. } v}{\text{Sin. } V} = n \times y \text{ . Sin. } 2v$, à cauſe que Cof. *V* = *y* Cof. *v* (*art.* 15). Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLL. I.

107. Donc la force ſuivant $to = \frac{n \text{ Sin. } 2v \times to}{Tt} =$ (*art.* 103) n Sin. $2v \cdot y \times - \frac{\text{Cof. } v\,(1 - yy)}{\text{Sin. } v} = -2n \times y\,(\text{Cof. } v)^2\,(1 - yy)$. Le ſigne — marque ici que la

direction de cette force, au lieu d'être de C vers t, comme elle le seroit, si dy étoit positif, est de t vers C; ainsi la force du point T vers C, est $2\lambda y$. Cos. $v^2 \times (1 - yy)$.

REMARQUE.

108. Il est bon de remarquer (ce qui nous sera utile dans la suite) que le quarré de l'Arc $dV = To^2 + d(V[1-yy])^2 = yy\,dv^2 + dy^2 + \frac{yy\,dy^2}{1-yy} = \frac{dy^2}{1-yy} + yy\,dv^2$.

COROLL. II.

109. Imaginons (Fig. 53) un grand cercle $Kp\Delta$ perpendiculaire au plan GTS, & décomposons la force qui agit sur le point p en deux autres, dont l'une soit perpendiculaire au plan $Kp\Delta$, l'autre soit dans ce même plan & ait pour direction la tangente au point p; la premiere de ces forces qui est égale à la force du point T suivant Tt, sera ny Sin. $2v$; & la seconde qui est égale à la force suivant to multipliée par $\frac{1}{V[1-CT^2]}$, sera $2ny$. Cos. v^2. $(V[1-yy])$.

PROBLÈME VIII.

110. *Trouver la force que le Soleil exerce sur l'extrémité* p *de l'Axe terrestre.*

Nous avons fait voir (*art.* 1) que cette force agit toujours dans un plan qui paſſe par l'Axe PCp, & l'on a vû (*art.* 10) que ſon moment par rapport au point C, ou, ce qui eſt la même choſe, le produit de la quantité de cette force par ſa diſtance au point C, eſt $\frac{3S\alpha \cdot 4D \cdot \text{Cof. } V \cdot \text{Sin. } V}{\alpha^3} \times \frac{4\alpha^5}{15}$, ou plus généralement $\frac{3S}{\alpha^3} \times A \cdot \text{Cof. } V \cdot \text{Sin. } V \times 4D$ (*art.* 13); or on peut (*art.* 92) ſuppoſer au lieu de cette force, une autre force appliquée au point p perpendiculairement à Cp dans le même plan CpS, & dont le moment ſoit le même par rapport au point C. Donc cette force appliquée en p ſera $= \frac{3S}{\alpha^3} \times \frac{A \times 4D \cdot \text{Sin. } V \cdot \text{Cof. } V}{Cp} = \frac{3S}{\alpha^3} \times A \times 4D \times \text{Sin. } V \times \text{Cof. } V$, à cauſe que Cp eſt ſuppoſé $= 1$.

COROLLAIRE I.

111. Donc (*art.* 14) on aura par la même raiſon $\frac{3\lambda}{\alpha'^3} \times A \times 4D \times \text{Sin. } V' \times \text{Cof. } V'$ pour l'expreſſion de l'action que la Lune exerce ſur le point p.

COROLL. II.

112. Donc l'action du Soleil ſur le point p ſuivant la perpendiculaire au cercle pK, ſera y Sin. $2v \times \frac{3S \cdot 2D \times A}{\alpha^3}$ (*art.* 109), & l'action du Soleil ſur le point p

ſuivant une tangente au même cercle, ſera $\frac{3S \cdot 4D \cdot A}{n^3} \times$ $y\sqrt{[1-yy]} \times$ Coſ. v^2. Il eſt queſtion préſentement de décompoſer de même la force de la Lune ſur le point p en deux autres, dont l'une agiſſe perpendiculairement au plan $Kp\Delta$, & l'autre ſuivant la tangente de ce cercle en p. Cette décompoſition ne laiſſe pas d'avoir quelque difficulté, parce que l'orbite de la Lune n'eſt pas exactement dans le plan de l'Ecliptique. Nous allons la réſoudre dans le Corollaire ſuivant.

COROLL. III.

113. Soit comme dans l'*art.* 15, CL (Fig. 54) le rayon dans lequel la Lune eſt ſuppoſée ſe trouver, & qui eſt diſtant de l'Ecliptique de la quantité LM, ſoit P le Pôle de la terre, PK la perpendiculaire abbaiſſée du Pôle P ſur le plan de l'Ecliptique CMK, $K\sigma$ une perpendiculaire à CM, PR perpendiculaire à CR, & RQ perpendiculaire à CM, ou, ce qui eſt la même choſe parallele à LM; ſoit pris l'Arc Pp infiniment petit, & ſoient menées pr, pk, rq, paralleles à PR, PK, RQ; il eſt évident 1°. que KQ, kq ſeront des lignes paralleles, puiſque les plans KPR, kpr ſont paralleles; 2°. que le Secteur CPp eſt au Secteur KCk dans la raiſon de $PRrp$ à $KQqk$, c'eſt-à-dire comme $PR \times CL$ à $KQ \times CM \times \frac{K\sigma}{KQ}$; ou comme $PR \times CL$ à $K\sigma \times CM$.

Soit enſuite $CP = 1$, $CK = y$, l'angle $KC\sigma = v'$, l'angle $PCR = V'$, l'angle conſtant $KQ\sigma$ aura auſſi une tangente conſtante que je nomme μ, & l'angle LCM en aura une que j'appelle p. De plus, il eſt évident que $PK - RQ$ ſera en raiſon conſtante avec KQ, & par conſéquent avec $K\sigma$. Or $K\sigma = y$ Sin. v, $PK = V[1-yy]$, $RQ = CQ \times \frac{LM}{CM} = (y$ Cof. $v' + y\mu \times$ Sin. $v') \times p$; donc on aura . . . . . $\frac{V[1-yy] - y \text{ Cof. } v' \times p - y\mu p \text{ Sin. } v'}{y \text{ Sin. } v'} =$ à une conſtante;

d'où l'on tire, comme dans l'*article* 103, $\frac{dy}{d\gamma} = -\frac{\text{Cof. } v'(1-yy) + py\,V[1-yy]}{\text{Sin. } v'}$. De plus, par le rapport marqué ci-deſſus entre les Secteurs PCp & KCk, on trouve $y\,d\gamma : Pp$ ou $dV' :: y$ Sin. $v' :$ Sin. $V' \times V[1+pp]$. Donc $\frac{d\gamma}{dV'} = \frac{\text{Sin. } v'}{\text{Sin. } V' \cdot (V[1+pp])}$. Or la force de la Lune ſur le point P pour lui faire décrire l'Arc Pp, eſt $\frac{3A(1+\epsilon) \cdot 4D \cdot S}{m^3} \times$ Sin. $V' \cdot$ Cof. V'; donc les deux forces qui agiſſent ſur le point K pour pouſſer ce point ſuivant une perpendiculaire à KC, & ſuivant KC, ſont $\frac{3A \times 4D \times S(1+\epsilon)}{m^3}$ Sin. $V' \cdot$ Cof. $V' \times \frac{d\gamma}{dV'}$, & $\frac{3A}{m^3} \times 4D \times S(1+\epsilon)$ Sin. $V' \cdot$ Cof. $V' \times \frac{d\gamma}{dV'} \times \frac{dy}{d\gamma}$; on

mettra dans ces deux quantités à la place de Cos. V sa valeur $CQ\,(V[1+pp])$ ou $(y\,\text{Cosin.}\,v' + y\mu\,\text{Sin.}\,v') \times (V[1+pp])$, & l'on aura les expressions des deux forces : mais il faut encore en faire disparoître la quantité μ. Pour cela, on remarquera que l'on a par *l'article* 15 $\mu = \frac{p\,V[1-yy]}{y\,\text{Sin.}\,v'}$; donc les forces perpendiculaires à KC, & suivant KC, sont (en négligeant le quarré de p) $\frac{3A:4D(1+\zeta).S}{n^3} \times \text{Sin.}\,v'\,(y\,\text{Cos.}\,v' + p\,V[1-yy])$, & $\frac{3A\times 4D(1+\zeta).S}{n^3} \times \text{Sin.}\,v \times (y\,\text{Cos.}\,v' + p\,V[1-yy]) \times \left[\frac{\text{Cos.}\,v'(1-yy) - py\,V[1-yy]}{\text{Sin.}\,v'}\right]$ ou $\frac{3A(1+\zeta).4D.S}{n^3} \times (y\,\text{Cos.}\,v'^2\,(1-yy) - 2pyy\,V[1-yy].\,\text{Cos.}\,v + p\,\text{Cos.}\,v'\,V[1-yy])$: or (Fig. 53) la force perpendiculaire au plan $Kp\Delta$ est égale à la premiere de ces deux forces, & la force suivant la tangente du cercle $Kp\Delta$ en p, est égale à la seconde multipliée par $\frac{1}{V[1-yy]}$ (*art.* 109) ; donc la force perpendiculaire au plan du cercle $Kp\Delta$, sera $\frac{3A.4D\,(1+\zeta).S}{n^3} \times \text{Sin.}\,v' \times (y\,\text{Cos.}\,v' + p\,V[1-yy])$, & l'autre force sera $\frac{3A\,(1+\zeta).4D.S}{n^3} \times (y\,V[1-yy].\,\text{Cos.}\,v'^2 - 2pyy \times \text{Cos.}\,v' + p\,\text{Cos.}\,v')$.

PROBLEME

PROBLÈME IX.

114. *On ſuppoſe que tous les points d'une Sphere* PR p r (Fig. 60) *ſoient animés par des forces qui tendent à la faire tourner autour de l'Axe* R r, *& qui ſoient par conſéquent proportionnelles à leurs diſtances à cet Axe, & que* Ψ *ſoit la force qui agit à la diſtance* 1 *du centre* C; *on demande la ſomme des produits de chaque particule par ſa force accélératrice & par ſa diſtance à l'Axe* R r.

Nous chercherons d'abord cette ſomme dans une ſurface Sphérique quelconque *LNOZ*. Pour cela nous nommerons la conſtante CL, f, la variable LM, x, & nous aurons $\frac{\Psi . NM}{CP}$ ou $\frac{\Psi \sqrt{[2fx - xx]}}{1}$ pour la force qui anime toutes les particules Nn ſituées à la diſtance MN de l'Axe ; de plus, la ſomme de ces particules $= 2\pi f dx$, en nommant 2π la circonférence. Donc l'élément de leur produit par $\frac{\Psi . NM}{CP}$ & par NM, eſt $2\Psi\pi f \times (2fx dx - xx dx)$ dont l'intégrale complette, en mettant pour x la valeur $2f$, eſt $2\pi\Psi f(\frac{8f^3}{2} - \frac{8f^3}{3}) = \frac{8\pi\Psi f^4}{3}$; or multipliant cette quantité par df, & enſuite intégrant & faiſant $f = a$, on aura l'intégrale cherchée $= \frac{8\pi\Psi a^5}{3 \cdot 5}$.

COROLLAIRE.

115. Donc l'intégrale cherchée eſt $= \frac{4\Psi a^5}{15} \times 4D$, & en général, ſi on ſuppoſe que f ſoient les rayons & Δ les denſités des différentes couches, on aura l'intégrale égale à $\frac{4}{15} 4D\Psi \times \int \Delta d(f^5) = 4D \times \Psi \times K$, en ſuppoſant $\frac{4}{15} \int \Delta d(f^5) = K$, comme dans l'*art.* 45.

Donc ſi Π eſt une force appliquée à l'extrémité p du rayon Cp & perpendiculaire au plan RPp, on aura (*art.* 90) $\Psi \times K \times 4D = \Pi \times 1$, & $\Psi = \frac{\Pi}{K \cdot 4D}$.

PROBLÈME X.

116. *Déterminer le changement que l'action du Soleil & celle de la Lune doivent produire dans la poſition de l'Axe* de rotation *de la terre, & dans la rotation de la terre autour de ce même Axe.*

Il eſt certain (*art.* 85) que quelque mouvement qu'on ſuppoſe à la terre autour de ſon centre, elle tournera toujours autour de quelque Axe CQ (Fig. 55) dont la poſition ſeroit conſtante, ſi l'action du Soleil & de la Lune étoient égales à zero : mais cette action fait changer l'Axe à chaque inſtant.

Je ſuppoſe donc que CQ ſoit l'Axe de rotation durant un inſtant quelconque dt, & j'imagine un plan

LCQ perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, & dont la commune ſection avec l'Ecliptique ſoit BS.

Je ſuppoſe enſuite que p ſoit le Pôle de la terre, ou l'extrémité de ſon *Axe de figure* ; & comme j'ai fait voir (*article* 77) que ce Pôle eſt toujours à une très-petite diſtance du Pôle de rotation Q, & que d'ailleurs les forces appliquées en p ſont très-petites eu égard à la force de rotation, il s'enſuit qu'on peut ſuppoſer ces forces appliquées au point Q.

Donc la force ϱ du point Q ſuivant la tangente en Q, ſera $= \frac{dt \times 3A.4D.S}{n^3} \times (y \text{ Cof. } v^2 \sqrt{[1-yy]} + [1+\epsilon] \times [y \text{ Cof. } v'^2 . \sqrt{[1-yy]} - 2pyy . \text{Cof. } v' + p \text{ Cof. } v'])$, & la force R perpendiculaire à QCL, ſera $\frac{dt.3A.4D.S}{n^3} \times [y \text{ Sin. } v \text{ Cof. } v + (1+\epsilon)[y \text{ Sin. } v' . \text{Cof. } v'] + (1+\epsilon) \times p \text{ Sin. } v' \sqrt{(1-yy)}]$. Or faiſons (*art.* 43) $dt = \frac{n dz}{.81}$, & ſoit $\frac{k.g \times 1}{n} =$ à la viteſſe de rotation d'un point quelconque de l'Equateur terreſtre ; ſi on réduit toutes les forces de rotation de toutes les particules du globe, à une ſeule qui paſſe par le point L & qui ſoit perpendiculaire au cercle CLQ, cette force que j'ai ci-deſſus appellée L, ſera (*art.* 90 & 115) $\frac{kg}{n} \times 4D \times K$.

Cela poſé, ſoit Cz (Fig. 49) la projection de l'Axe de rotation dans l'inſtant ſuivant, & ſoit ſuppoſé l'angle

zCo ou ſon Sinus $= d\varepsilon'$, on aura en mettant dans l'*article* 105 à la place de ϱ & L leurs valeurs trouvées ci-deſſus, & y à la place de y' qui en différe très-peu, l'équation ſuivante . . . . . .

$$d\varepsilon' = \frac{u\,dz}{g} \times \frac{3A \times S}{u^3} \times \frac{n}{kg.K} \times (\sqrt{[1-yy]} \times \text{Cof. } v^2 + \sqrt{[1-yy]}\,(1+\epsilon)\,\text{Cof. } v'^2 + \frac{p(1-2yy)\,\text{Cof. } v'}{y})$$: or

(*art.* 43) $p = -m'\zeta$. Nous en avons déja dit la raiſon dans cet *art.* 43, & afin qu'on n'ait aucun doute ſur ce ſujet, il n'y a qu'à ſuppoſer que la Lune ſoit au-deſſus du plan de l'Ecliptique, au lieu que nous l'avons ſuppoſée au-deſſous; en ce cas, on aura $p = m'\zeta$ ſans aucune difficulté, mais les termes qui contiennent p dans l'équation doivent changer de Signe. C'eſt pourquoi, au lieu de $+p$, on aura $-m'\zeta$, & au lieu de $-p$, $+m'\zeta$: donc en général, il faut ſubſtituer $-m'\zeta$ à la place de p. De plus, $y = \text{Cof. } \pi$; $\sqrt{[1-yy]} = \text{Sin. } \pi$; $gg = \frac{S}{u^3} \times u$: enfin $1 - 2\,\text{Cof. } \pi^2 = -\text{Cof. } 2\pi$; faiſant ces ſubſtitutions, il viendra $d\varepsilon' = \frac{3A}{k.K}\,\text{Cof. } v^2 dz\,\text{Sin. } \pi +$

$$+ \frac{3A\,\text{Cof. } v'^2\,(1+\epsilon)\,dz\,\text{Sin. } \pi}{k.K}$$

$$- \frac{3A\,dz\,(1+\epsilon)\,m'\zeta \times \text{Cof. } v' \times -\text{Cof. } 2\pi}{K.k.\text{Cof. } \pi}.$$

Equation qui eſt préciſément la même, que celle que nous avons trouvée dans l'*article* 79 par une autre mé-

thode ; parce que k eſt ici une quantité poſitive, au lieu que dans l'*article* cité elle étoit une quantité négative, deſorte que $+k$ dans cette derniere équation eſt la même choſe que $-k$ dans l'autre.

Maintenant, nous avons trouvé par l'*art.* 102, $FD = \sqrt{[1 - y'y']} - \frac{Ry'}{L}$; d'où il s'enſuit que $-\frac{Ry'}{L}$ ou $\frac{-Ry}{L}$ eſt la différence de $\sqrt{[1 - y'y']}$, ou de la diſtance de l'extrémité de l'Axe de rotation au plan de l'Ecliptique, donc on aura $d(\sqrt{[1 - y'y']}) = -\frac{Ry'}{L}$, & ſubſtituant les valeurs de R & de L, il viendra . . . . .

$$d(\sqrt{[1 - y'y']}) = \frac{3A\,dz\ \text{Sin.}\ 2v\ .\ \text{Cof.}\ \pi^2}{-2K\ .\ k}$$

$$+ \frac{3A\,(1+\zeta)\,dz\ \text{Cof.}\ \pi^2\ \text{Sin.}\ 2v'}{-2K\ .\ k}$$

$$- \frac{3A\,(1+\zeta)\,m'\zeta\ .\ \text{Sin.}\ v'\ .\ \text{Cof.}\ \pi\ .\ \text{Sin.}\ \pi\ .\ dz}{-K\ .\ k}$$

Equation qui revient au même encore, que l'équation A' de l'*article* 78.

Enfin, ſi on veut avoir l'équation de la viteſſe de rotation, on remarquera que la force L devient dans l'inſtant ſuivant $(R + L) \times (1 - \frac{R}{L}) = L - \frac{RR}{L}$ (*art.* 98) : or RR étant cenſée infiniment petite du ſecond ordre, il s'enſuit que la force de rotation ne change pas ſenſiblement, & que par conſéquent on peut regarder la viteſſe de rotation comme conſtante ; ce qui confir-

me ce que nous avons remarqué dans l'*article* 77, que la viteſſe de rotation de la terre n'eſt point ſenſiblement altérée par l'action de la Lune & du Soleil. Nous trouvons même ici que l'équation produite dans la viteſſe de rotation devroit être de l'ordre de RR, c'eſt-à-dire inſenſible par rapport à la préceſſion annuelle des Equinoxes qui eſt elle-même très-petite ; & ſi nous avons trouvé dans l'*article* 77, que cette équation devoit être du même ordre que la préceſſion des Equinoxes, quoique bien plus petite, c'eſt que nous conſidérions alors la rotation de la terre autour de ſon Axe de figure, qui n'eſt pourtant pas à la rigueur le véritable Axe de rotation : or c'eſt de ce dernier Axe *véritable* qu'il eſt ici queſtion.

CHAPITRE XII.

De la préceſſion des Equinoxes, en n'ayant point égard à la rotation de la terre autour de ſon Axe.

117. COMME cette hypotheſe, ainſi que celles que nous ferons dans le Chapitre ſuivant, n'eſt point conforme à ce qui ſe paſſe dans la nature, on pourroit regarder tout ce que nous allons dire, comme un pur jeu de Geométrie aſſez inutile à notre ſujet. Mais j'aurai ſoin de ne rien inférer dans ces deux Chapitres, qui ne ſoit ou néceſſaire pour ce que j'aurai à dire dans

la ſuite, ou au moins fort utile pour répandre un nouveau jour ſur ce que j'ai déja dit.

En premier lieu, je remarquerai que ſi la terre ne tourne point autour de ſon Axe, on doit avoir $k = 0$, & qu'ainſi pour trouver la préceſſion des Equinoxes dans cette hypotheſe, il ſuffit d'effacer dans les équations Y & Z de l'*article* 45, les termes où k ſe rencontre, ce qui donnera les deux équations ſuivantes . . .

$$\frac{3A\,dz^2\,\text{Sin.}\,2v\,.\,\text{Cof.}\,\pi^2}{2K} + \frac{3A\,(1+\zeta)\,dz^2\,\text{Cof.}\,\pi^2\,.\,\text{Sin.}\,2v'}{2K}$$

$$- \frac{3A\,(1+\zeta)\,\text{Sin.}\,v'\,.\,m'\zeta\,\text{Cof.}\,\pi\,.\,\text{Sin.}\,\pi\,dz^2}{K}$$

$$= d\,(ds\,\text{Cof.}\,\pi^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C')$$

$$dd\pi = \frac{3A\,\text{Cof.}\,v^2\,dz\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi}{K}$$

$$+ \frac{3A\,\text{Cof.}\,v'^2\,dz^2\,(1+\zeta)\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi}{K}$$

$$- \frac{3A\,dz^2\,(1+\zeta)\,m'\zeta\,\text{Cof.}\,v'\,(1-2\,\text{Cof.}\,\pi^2)}{K}$$

$$- ds^2\,\text{Sin.}\,\pi\,.\,\text{Cof.}\,\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D')$$

Or je vais faire voir par une autre méthode, que ces équations ſont en effet celles de la préceſſion des Equinoxes & de la nutation de l'Axe de la terre, dans l'hypotheſe que la terre ne tourne pas autour de ſon Axe; ce qui ſervira de nouveau à confirmer nos formules générales.

Je remarquerai d'abord que k étant égale à zero dans cette hypotheſe, on a, par l'*article* 44, $dP = -ds \times$

$V[1-yy]$. Or je vais prouver qu'en effet dP a cette valeur dans l'hypotheſe préſente ; pour cela il ſuffit de démontrer (*art.* 73) que l'extrémité p de l'Axe de la terre décrit à chaque inſtant une portion de grand cercle.

LEMME VII.

118. *Imaginons que* PRpS, RQSC (Fig. 56) *ſoient deux grands cercles perpendiculaires l'un à l'autre dans une Sphere dont le centre* C *eſt arrêté fixement, & qui eſt libre dans tous ſes autres points, ou ſi l'on veut, dont le centre* C *ſe meut en ligne droite avec une viteſſe & une direction quelconques. Suppoſons, de plus, que cette Sphere tourne autour de l'Axe* CQ *perpendiculaire au plan* PRpS, *enſorte que la ligne* Pp *perpendiculaire à la commune ſection* RCS, *décrive ou tende à décrire le cercle* pRPS; *je dis que ſi on imprime en même tems à la Sphere un autre mouvement qui tende à la faire tourner autour de l'Axe* Cq *placé dans le plan* RQS, *le mouvement compoſé qui réſultera de ces deux-là, ſera un mouvement de rotation autour d'un Axe* Cq′ *placé dans le plan* RQS.

Car 1°. (*art.* 92) la force ou le mouvement imprimé à la Sphere pour tourner autour de CQ, peut ſe réduire à une ſeule force qui agiſſe à l'extrémité de la ligne Cp perpendiculaire à la commune ſection RCS, ſuivant une ligne pV parallele à cette commune ſection ; 2°. (par le même *article*) la force imprimée à la Sphere pour tourner autour de Cq, peut ſe réduire de même à une ſeule force

force agiſſant ſuivant pu parallele à la ligne Co qui eſt perpendiculaire à Cq. Donc ſi on cherche la direction pu' de la force unique, réſultante des deux forces qui agiſſent ſuivant pV & pu, il eſt évident que le mouvement de la Sphere ſera le même que s'il venoit de la ſeule force ſuivant pu'. Or tirant Co' parallele à pu' & Cq' perpendiculaire à Co', on ſçait (*art.* 90) que la force ſuivant pu' doit produire un mouvement de rotation autour de l'Axe Cq'. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLL. I.

119. De-là il s'enſuit, que ſi la force qui anime la Sphere à tourner autour du centre C, change à chaque inſtant de direction, mais qu'elle tende toujours à faire tourner la Sphere autour de quelque Axe placé dans le plan RQS, les points, P, p, tendront continuellement à ſe mouvoir dans un grand cercle, & s'y mouvroient en effet ſi la force qui les anime venoit à ceſſer.

COROLL. II.

120. Puiſque la force du Soleil agit toujours dans le plan d'un Méridien (*art.* 1), il s'enſuit qu'elle tend (*art.* 90) à faire tourner la terre à chaque inſtant autour d'un Axe variable Cq toujours placé dans le plan de l'Equateur; par conſéquent les extrémités P, p, de l'Axe de la terre tendront continuellement à décrire un grand

cercle. Nous regardons ici le centre *C* comme fixe, parce que les mouvemens que la force du Soleil peut imprimer en ligne droite au centre *C*, n'altérent point le mouvement de rotation.

COROLL. III.

121. Donc puiſque la force de la Lune agit toujours, ou peut être ſuppoſée agir (*art.* 116) à l'extrémité de l'Axe *p* ſur laquelle agit le Soleil, il s'enſuit que l'extrémité *p* de l'Axe de la terre décrit toujours, ou tend à décrire un Arc de grand cercle.

PROBLÈME XI.

122. *Déterminer la préceſſion des Equinoxes, ou en général le mouvement de l'Axe de la terre, en n'ayant point égard à la rotation diurne de la terre autour de ſon Axe.*

Afin de rendre la ſolution plus ſimple, nous n'aurons d'abord égard qu'à l'action du Soleil.

Pour déterminer le mouvement de l'Axe de la terre, nous chercherons la courbe que décrit autour du centre *C* (Fig. 57) le point *T* qui eſt la projection du Pôle *p* ſur le plan de l'Ecliptique; & nous ſuppoſerons que la variable $CT = y$, & que cette ligne *CT* décrive un petit angle ds durant le tems dt que la terre décrit l'arc $u\,dz$ avec la viteſſe g.

Nous venons de remarquer (*article* 121), que dans

l'hypotheſe préſente le Pôle p tend toujours à ſe mouvoir dans un grand cercle, enſorte que ſi la force qui anime ce point venoit tout-à-coup à ceſſer, il décriroit en effet un grand cercle d'un mouvement uniforme, & que le point T qui en eſt la projection décriroit une Ellipſe dont C ſeroit le centre, de maniére que les aires ſeroient proportionnelles aux tems. Donc le point T tend continuellement à décrire une Ellipſe dont le point C eſt le centre, & la force vers C qui réſulte de cette tendance eſt évidemment égale à la force centrifuge du Pôle de la terre, multipliée par le rapport de CT au rayon. Or la force centrifuge du Pôle eſt égale au quarré de ſa viteſſe diviſée par le rayon 1, & le quarré de ſa viteſſe eſt = au quarré de l'Arc qu'il parcourt, diviſé par dt^2, c'eſt-à-dire (*art.* 108) $\frac{yy\,dz^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2\,(1-yy)}$; donc ſi on met pour dt^2 ſa valeur $\frac{n^2\,dz^2}{gg}$ ou $\frac{n\,dz^2}{F}$, en appellant F la force $\frac{S}{n^2}$, & qu'on multiplie la quantité précedente par y, on aura pour la force du point T vers C, réſultante de la force d'inertie, l'expreſſion $y\,(yy\,dz^2 + \frac{dy^2}{1-yy}) \times \frac{F}{n\,dz^2}$, & cette force étant jointe à la force ſuivant TC qui vient de l'action du Soleil, on aura $y\,(\frac{yy\,dz^2 \,.\, F}{n\,dz^2} + \frac{F\,dy^2}{n\,dz^2\,(1-yy)}) + \frac{2yy\,.\,(1-yy)}{4D\,.\,K}$ Coſin. v^2 pour la force

qui pouſſe le point T vers C, (*art.* 109 & 115) & que j'appelle R ; & la force ſuivant Tt (Fig. 50) ſera $= \frac{ny \cdot \text{Sin. } 2v}{4D \cdot K}$. Or s'il n'y avoit aucune force ni ſuivant TC, ni perpendiculairement à TC, le point T décriroit une ligne droite, enſorte que l'on auroit $ddy = yds^2$, & $dds = -\frac{2dsdy}{y}$; donc en ayant égard aux deux forces ci-deſſus, on trouvera . . . . . $ddy = yds^2 - Rdt^2 = 0$, $ydds = -2dsdy + \frac{nydt^2 \text{ Sin. } 2v}{4D \cdot K}$: donc mettant pour dt^2 ſa valeur $\frac{n^3 dz^2}{S}$, & pour $2n$ ſa valeur $\frac{3S}{n^3} \times A \times 4D$ (*art.* 110), on aura

(E') . . . . $ddy = yds^2 - y\left(yyds^2 + \frac{dy^2}{1-yy}\right) - \frac{3A \text{ Cof. } v^2}{K}(1-yy)ydz^2$ . . . . . .

(F') . . . . $ydds + 2dsdy = \frac{3Adz^2}{2K} y \text{ Sin. } 2v$.

COROLL. I.

123. Soit π l'angle que fait à chaque inſtant l'Axe de la terre avec l'Ecliptique, on aura $y = \text{Cofin. } \pi$, & $1 - yy = \text{Sin. } \pi^2$. De plus, $ydds + 2dsdy = \frac{d(yyds)}{y}$; donc les deux équations précedentes deviendront celles-ci . . . . . .

(G') . . . . $dd(\text{Cof. } \pi) = ds^2 [\text{Cof } \pi \cdot \text{Sin. } \pi^2] - d\pi^2 \text{ Cof. } \pi - \frac{3Adz^2 (\text{Cof. } v^2)}{K} \times \text{Cof. } \pi \times \text{Sin. } \pi^2$.

$$(H') \ldots\ldots d(dz\ \text{Cof.}\ \pi^2) = \frac{3A\,dz^2\ .\ \text{Cof.}\ \pi^2\ .\ \text{Sin.}\ 2V}{2K}$$

COROLL. II.

124. Si on veut maintenant avoir égard à l'action de la Lune, on trouvera que la force totale qui agit ſur le point T perpendiculairement à CT, eſt (*art.* 113)

$$\frac{3A\ \text{Cof.}\ \pi \times \text{Sin.}\ 2v}{2K} + \frac{3A\,(1+\zeta)\ \text{Cof.}\ \pi\ .\ \text{Sin.}\ 2v'}{2K}$$

$$- \frac{3A\,(1+\zeta)\,m'\zeta\ \text{Sin.}\ v'\ .\ \text{Sin.}\ \pi}{K}$$; & que la force qui agit ſur le point T ſuivant TC, eſt $\frac{3A}{K} \times \text{Cof.}\ v^2 \times \text{Sin.}\ \pi^2\ .\ \text{Cof.}\ \pi$

$$+ \frac{3A\,(1+\zeta)\ \text{Cof.}\ v'^2\ \text{Sin.}\ \pi^2\ \text{Cof.}\ \pi}{K}$$

$$- \frac{3A\,(1+\zeta)\,m'\zeta\ \text{Cof.}\ v' \times \text{Sin.}\ \pi\,(1-2\ \text{Cof.}\ \pi^2)}{K}.$$

Donc ſi on met au lieu de $dd(\text{Cof.}\ \pi) + d\pi^2\ \text{Cof.}\ \pi$ ſa valeur $- dd\pi \times \text{Sin.}\ \pi$ dans les équations précedentes, & qu'on ait égard à la force de la Lune, on aura deux équations différentielles qui ſeront préciſément les mêmes que l'on a trouvées ci-deſſus (*art.* 117) par la méthode générale.

COROLL. III.

125. Pour peu qu'on compare ces deux équations avec celles qu'on a trouvées (*art.* 45) dans l'hypotheſe du mouvement diurne de la terre autour de ſon Axe, on verra combien elles en ſont différentes. On remar-

quera, par exemple, que l'équation Y (*art.* 45) qui ſert à trouver la nutation de l'Axe, lorſque k eſt $= -365\frac{1}{4}$ ſert au contraire à trouver la valeur de $d\epsilon$ ou la préceſſion des Equinoxes lorſque $k = 0$, parce qu'alors on ne peut pas négliger le terme $d(d\epsilon \text{ Cof. } \pi^2)$ par rapport au terme $d(k\,dz \text{ Sin. } \pi)$ qui eſt lui-même nul; par la même raiſon, l'équation Z (*art.* 45) ſervira à déterminer la nutation de l'Axe: or comme la quantité $d\epsilon$ par la premiere équation ſe trouve de l'ordre de $\frac{A}{K}$, la quantité $d\epsilon^2$ ſera de l'ordre de $\frac{A^2}{K^2}$; par conſéquent on pourra négliger dans l'équation Z le terme où $d\epsilon^2$ ſe rencontre. D'où il ſera facile de voir que la valeur de π renfermera un terme conſtant de cette forme $\frac{3Azz}{4K}$, à cauſe que Cof. v^2 renferme un terme tout conſtant $\frac{1}{2}$, & qu'ainſi l'angle de l'Axe de la terre avec l'Ecliptique ſeroit ſujet à des variations conſidérables: ce qui ne doit pas paroître ſurprenant, puiſque le Pôle de la terre (*art.* 121) tend toujours à décrire un grand cercle dans cette hypotheſe, & que par conſéquent il fait un effort continuel pour ſe mouvoir dans un Méridien, & décrit en effet à chaque inſtant un petit Arc de quelque Méridien, & non pas un Arc de cercle parallele à l'Ecliptique.

COROLL. IV.

126. De-là on voit que la rotation de la terre autour de ſon Axe, influe beaucoup ſur le mouvement que l'Axe de la terre doit avoir en vertu de l'action du Soleil & de la Lune ; cependant quelques Lecteurs auront peut-être de la peine à concevoir comment ce mouvement de rotation peut altérer ſi fort celui que l'Axe de la terre auroit, ſi la rotation étoit nulle. Pour en faire bien ſentir la raiſon, je ſuppoſe un globe parfaitement en repos $QLql$ (Figure 58), dont un des points Q ſoit tiré perpendiculairement au plan $QLql$ par une force quelconque que je nomme Q ; il eſt certain (*art.* 90) qu'en vertu de cette force, le point Q décriroit un grand cercle autour de l'Axe Ll. Suppoſons préſentement, que dans l'inſtant que cette force agit ſur le point Q, le globe reçoive un mouvement de rotation autour de l'Axe Qq, il ſuit de l'*article* 90, qu'on pourra ſubſtituer à ce mouvement une force placée en L, & agiſſant perpendiculairement au plan $QLql$. Or comme les forces Q, L ſont paralleles l'une à l'autre, on pourra les réduire à une ſeule force placée au point H de la ligne LQ, tel, que $LH \times L = Q \times HQ$. Donc joignant CH, & menant CF perpendiculaire à CH, la ligne CF ſera l'Axe de rotation du globe : donc le point Q décrira autour de cet Axe un cercle qui aura pour rayon le Sinus QO, & il eſt évident que ce cercle ſera fort petit, ſi Q eſt fort petit par rapport à L ;

au lieu que quand $L = 0$, le point Q doit décrire un grand cercle, quelque petite que ſoit la force Q. Donc &c.

REMARQUE.

127. On peut ajouter, pour la confirmation de ce que nous venons de remarquer dans l'*art.* précedent, qu'en quelque endroit des lignes CL, CQ, que les forces L, Q, ſoient placées, pourvû qu'elles conſervent le même moment par rapport au point C, la force qui en réſultera ſera toujours placée dans la même ligne CH, & aura le même moment par rapport au point C. Pour le prouver, ſoient imaginées deux puiſſances l, q, appliquées en l, q, & telles que $l \times Cl = q \times Cq$: ayant joint lq qui coupe en h la ligne CH, ſoient abbaiſſées des points H, h, les perpendiculaires HM, hN, on aura $HM : hN :: CM : CN$, & $HM = \frac{MQ \times LC}{CQ}$: donc $CN = \frac{hN \times CM \times CQ}{MQ \times LC}$; or $hN = \frac{Cl \times Nq}{Cq}$, & $CM : MQ :: Q : L$; donc $CN : Nq :: \frac{Cl \times CQ \times Q}{L} : CL \times Cq$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $CQ \times Q = Cq \times q$, & de $CL \times L = Cl \times l$) $:: q : l$; donc le point h eſt le centre de gravité des forces q, l. De plus, à cauſe de $HM = \frac{MQ \times LC}{CQ}$ & de $\frac{MQ}{CQ} = \frac{L}{Q+L}$, on aura $HM = \frac{L \times LC}{Q+L}$; de même à cauſe de $hN = \frac{Cl \times Nq}{Cq}$ & de $\frac{Nq}{Cq} = \frac{l}{q+l}$

$\frac{l}{q+l}$; on aura $hN = \frac{Cl \times l}{q+l}$. Donc puiſque $Cl \times l = CL \times L$, on aura $HM : hN :: q+l : Q+L$. Donc puiſque la force en H eſt $Q+L$, & la force en h, $q+l$, il s'enſuit que les momens de ces forces par rapport à C ſont égaux entr'eux.

CHAPITRE XIII.

De la préceſſion des Equinoxes dans quelques hypotheſes particulieres.

128. LEs Problêmes dont nous allons donner ici la ſolution, ſeront fort utiles pour les remarques que nous ferons dans le Chapitre ſuivant ſur la Théorie de la préceſſion des Equinoxes, donnée par M. *Newton*.

PROBLÊME XII.

129. *Trouver la préceſſion moyenne des Equinoxes dans l'hypotheſe, que la terre ſoit réduite à un ſeul anneau placé dans le plan de l'Equateur, & que le Soleil ſeul agiſſe ſur cet anneau.*

Soit α l'épaiſſeur de l'anneau, ou la différence des rayons qui le forment, on aura pour le moment de la force du Soleil la quantité $\frac{3S \cdot \alpha \cdot 4D}{2n^3} \times$ Sin. V. Cof. V,

en faiſant $b = a = 1$ dans l'*art.* 9 ; & par conſéquent $\Psi . L = \frac{3Sa}{2.n^3} \times 4D . y$ Cof. v, & $\Psi . L$ Cof. $v\sqrt{[1-yy]}$ $= \frac{3Sa}{2.n^3} . 4D . y\sqrt{[1-yy]} .$ Cof. $v^2 = \frac{3Sa}{2.n^3} \times 4D \times$ Sin. $\pi .$ Cof. $\pi .$ Cof. v^2 ; de plus, la terre étant réduite à cet anneau, on aura $a - b = 0$; donc la quantité M (*art.* 44) ſera $= 0$, & la quantité $K \times 2D$, ſera $= \frac{a . 4D}{2} = a . 2D.$

Donc l'équation X de l'*article* 44 ſe changera en celle-ci (ſi on néglige les termes $dd\pi$ & $- d\varepsilon^2$ Sin. $\pi \times$ Cof. π, auſſi-bien que ceux où ſe trouve $1 + \mathcal{C}$, & qui viennent de la force de la Lune) $\frac{3a . 4D . dz}{2k . a} \times$ Sin. $\pi \times$ Cof. $v^2 + \frac{2a \times 2D d\varepsilon = 0}{a}$ ou $d\varepsilon = \frac{-3dz}{4k}$, en ſuppoſant Sin. $\pi = 1$, en mettant pour Cof. v^2 ſa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ Cof. $2v$, & en négligeant la quantité $\frac{1}{2}$ Cof. $2v$ qui ne donne que l'équation de la préceſſion, & non ſa valeur moyenne. Donc la préceſſion annuelle des Equinoxes dans cette hypotheſe ſeroit $= \frac{3}{4 . 365\frac{1}{4}} \times 360°.$

COROLL. I.

130. Donc il eſt viſible que ſi la terre étoit réduite à un ſeul anneau circulaire placé dans le plan de l'E-

quateur, & que l'angle de l'Equateur avec l'Ecliptique fût fort petit, la préceſſion annuelle & moyenne des Equinoxes ſeroit en raiſon inverſe de $-k$, c'eſt-à-dire en raiſon du tems de la rotation de l'anneau autour d'un Axe qui lui ſeroit perpendiculaire. Car $-kdz$ étant proportionnelle à la viteſſe angulaire de cette rotation d'Occident en Orient, il s'enſuit que le tems de la rotation eſt proportionnel à $\frac{1}{-k}$.

COROLL. II.

131. On peut trouver par un calcul, qu'il ſeroit trop long d'inférer ici, & que je donnerai ailleurs, que le mouvement annuel des nœuds de la Lune eſt $\frac{3}{4} \times 360 \times \varrho$, ϱ étant le rapport du tems périodique de la Lune, au tems périodique de la Terre. Donc le mouvement des nœuds de la Lune eſt à celui des nœuds de l'anneau, en raiſon des *Périodes* de la Lune & de l'anneau.

COROLL. III.

132. Si on regarde la terre comme un Sphéroide Elliptique homogene, dont l'Equateur ſoit à peu près dans le plan de l'Ecliptique, enſorte que Sin. π puiſſe être ſuppoſé $= 1$, on aura (*art.* 44 *&* 52) pour l'équation de la préceſſion annuelle & moyenne des Equinoxes $di = \frac{3\alpha dz}{2 \cdot 365\frac{1}{4}}$. Donc la préceſſion dans cette hy-

potheſe ſera à la préceſſion dans l'hypotheſe de l'anneau circulaire, comme 2α eſt à 1.

REMARQUE.

133. Il faut bien prendre garde que l'Equateur ne doit pas être ſuppoſé à la rigueur dans le plan de l'Ecliptique. Car Cof. π ſeroit $= 0$; donc tous les termes de l'équation Z (*art.* 45) s'évanouiroient, & l'équation Y donneroit Sin. $\pi =$ à une conſtante ; ainſi l'Axe de la terre n'auroit aucun mouvement : & en effet, il eſt viſible que ſi l'Axe de la terre étoit perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, l'action du Soleil ſur toutes les parties du globe, ou ſur celles de l'anneau (la terre étant réduite à un anneau placé dans l'Equateur) ſe réduiroit à une force qui paſſeroit par le centre du globe, & qu'ainſi cette action ne produiroit aucun mouvement dans l'Axe de la terre, ni par conſéquent aucune préceſſion. D'ailleurs, l'Equateur étant alors dans le plan de l'Ecliptique, il ne pourroit y avoir de préceſſion, par la ſeule raiſon que ces deux plans n'auroient point alors de commune ſection.

Mais, dira-t-on, comment ſe peut-il que ſi on incline tant ſoit peu l'Axe de la terre, la préceſſion qui étoit auparavant nulle, devienne très-ſenſible, & même la plus grande qu'il eſt poſſible ; car on voit par les formules précedentes qu'elle eſt proportionnelle à Sin. π, toutes choſes d'ailleurs égales ? je réponds, que l'extrémité de

l'Axe de la terre reçoit alors à la vérité un mouvement très-petit, mais que l'angle décrit par la projection de l'Axe à chaque inſtant eſt fort conſidérable, par rapport au mouvement de l'Axe. En effet, ſuppoſons, par exemple, que le Pôle de la terre décrive un petit Arc parallele à l'Ecliptique, que je nomme ϵ, il eſt certain que $\frac{\epsilon}{\text{Cof. } \pi}$ ſera le mouvement angulaire de la projection de l'Axe, tandis que ϵ ſera celui de l'Axe. Or Cof. π (*hyp.*) eſt fort petit : donc le mouvement angulaire de la projection de l'Axe, qui (comme on l'a déja remarqué) (*art.* 46) eſt toujours égal à la préceſſion des Equinoxes, eſt infiniment plus grand que le mouvement de l'Axe même. Ainſi il n'eſt pas ſurprenant, que pour peu qu'on incline l'Axe de la terre, la préceſſion des Equinoxes devienne fort ſenſible.

PROBLÈME XIII.

134. *Trouver la préceſſion moyenne des Equinoxes dans l'hypotheſe que le Soleil ſeul agiſſe, & que la terre ſoit un Sphéroide homogene, réduit à la ſeule croute ou double Ménisque* PapAPepE (Fig. 60), *la figure intérieure* Pape *étant retranchée.*

Il eſt clair que dans cette hypotheſe, on a $A \times 4D = \frac{4\alpha}{15} \times 4D$ (*art.* 44), $M \times 2D = \frac{4}{15} \times 2D \times 2\alpha$, $K \times 2D = \frac{4}{15} \times 2D \times 4\alpha$ (*art.* 43). Donc l'équation X de l'*art.* 44 ſe

changera en celle-ci, $\frac{3\alpha \cdot 2dz \text{ Cof. } v^2 \text{ Sin. } \pi}{(2\alpha+4\alpha)k} + \frac{8di}{6} = 0$. Donc faiſant les mêmes ſuppoſitions que dans l'*art.* 129, c'eſt-à-dire Sin. $\pi = 1$, on aura $\frac{3dz}{-k(2+4)} = \frac{4di}{3}$; ou $di = \frac{-3dz}{8k}$.

COROLL. I.

135. Donc ſi on nomme R la préceſſion des Equinoxes dans l'hypotheſe de l'anneau circulaire, il faudra multiplier cette quantité R par $\frac{1}{2}$, pour avoir la préceſſion dans l'hypotheſe que la terre ſoit réduite au double Ménifque dont il s'agit ici. Car il réſulte de l'*art.* précedent, que la préceſſion annuelle dans l'hypotheſe du double Ménifque, eſt $\frac{360^\circ \times 3}{8 \times 365\frac{1}{4}}$: or (*art.* 129) $R = \frac{3 \times 360^\circ}{4 \times 365\frac{1}{4}}$. Donc &c.

COROLL. II.

136. Donc puiſque la préceſſion annuelle des Equinoxes dans l'hypotheſe du double Ménifque eſt $R \times \frac{1}{2}$, & que dans l'hypotheſe du globe ou Sphéroide applati elle eſt $R \times 2\alpha$; il s'enſuit qu'il faudra multiplier par 4α la préceſſion dans l'hypotheſe du double Ménifque, pour avoir la préceſſion dans l'hypotheſe du globe, ou,

ce qui revient à peu près au même, du Sphéroide applati homogene.

CHAPITRE XIV.

Remarques ſur la Théorie de la préceſſion des Equinoxes, donnée par M. Newton.

137. C'Est dans la Prop. 39 du 3ᵉ Livre des Principes Mathématiques, que M. *Newton* a renfermé cette Théorie. Il réſulte de ſes calculs, que ſi l'Axe de la terre étoit à très-peu près perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, & que la terre fût un Sphéroide Elliptique homogene, enſorte que α fut $= \frac{1}{230}$, la préceſſion annuelle des Equinoxes ſeroit de $9'' 56'''$, c'eſt-à-dire d'environ $10''$, en la ſuppoſant produite par l'action ſeule du Soleil. Or il réſulte de la formule $\frac{3\alpha \cdot 360^{\circ}}{2 \cdot 365\frac{1}{4}}$ trouvée (*art.* 132) qu'en ſuppoſant avec M. *Newton* $\alpha = \frac{1}{230}$, la préceſſion annuelle des Equinoxes produite par l'action ſeule du Soleil, ſeroit égale à environ $\frac{3 \cdot 60 \cdot 60''}{2 \cdot 230}$, c'eſt-à-dire à plus de $23''$, ce qui eſt plus que le double de la quantité trouvée par M. *Newton*. Voilà donc une différence qui peut faire ſoupçonner

qu'il y a quelque mépriſe dans la maniére dont M. *Newton* a réſolu ce Problême. Pour m'en aſſurer, j'ai étudié avec toute l'attention qui m'a été poſſible, la Prop. 39 de M. *Newton*, & les propoſitions précedentes d'où elle dépend, & il m'a paru que quelques-unes de ces propoſitions n'étoient point exactes. C'eſt ce que je vais tâcher de montrer avec tout le détail, qui eſt dû à l'importance de la matiére, & à l'autorité du grand homme dont je crois devoir ici m'écarter; ſi on me fait voir que je me ſuis trompé, je m'en rapprocherai avec d'autant plus de plaiſir, que tout ce que je vais dire ne porte aucune atteinte au ſyſtême de la Gravitation.

138. Pour faire ce détail avec plus d'ordre, je ſuivrai toutes les propoſitions de M. *Newton*, en démontrant d'après mes formules celles qui m'ont ſemblé ſuſceptibles de démonſtration, & en faiſant remarquer ce qui ne me paroît pas exact dans les autres.

Soit, dit M. *Newton*, le Sphéroide *APEp* (Fig. 60) d'une denſité uniforme, qui repréſente la terre, *Pape*, la Sphere inſcrite à la terre, & paſſant par les Pôles *P*, *p*, *QR* un plan perpendiculaire à la ligne menée du centre *C* au Soleil; & ſuppoſons que toutes les parties de la terre extérieure *PapAPepE* faſſent effort pour s'éloigner du plan *QR*, de maniére que l'effort de chaque particule ſoit comme ſa diſtance à ce plan: je dis 1°. que la force de toutes les particules placées dans le cercle *AE* de l'Equateur, pour faire tourner la terre autour de ſon centre, ſera la moitié de la force

force d'un égal nombre de particules placées au point A de l'Equateur qui eſt le plus éloigné du plan QR, pour faire tourner la terre autour de ſon centre; 2°. que ce mouvement circulaire ſe fera autour de la commune ſection de l'Equateur & du plan QR.

Pour démontrer cette propoſition, nous remarquerons 1°. qu'en conſervant les noms de l'*art.* 7, la force au point A de l'Equateur, en ſuppoſant toute la maſſe $2\pi\alpha$ des particules de l'Equateur raſſemblée en A ſeroit $= -\frac{3S}{u^3} \times 2\pi\alpha \times -kq$, en ſuppoſant $a = 1$ pour abréger; pour avoir cette expreſſion, il ne faut que faire $2fx - xx = 0$, & $q' = 0$ dans l'*article* 8. Or en faiſant dans l'*art.* 9 $b = a$, on trouvera la force des particules renfermées dans le plan de l'Equateur $= \frac{-3S\pi\alpha . kq}{u^3} \times -1$. Il eſt viſible que cette ſeconde force eſt la moitié de la précedente.

2°. Il réſulte des *art.* 1 & 90, que la force que le Soleil exerce ſur le double Ménifque $PapAPepE$, tend à faire tourner la terre autour d'un Axe perpendiculaire à la fois à l'Axe Pp de la terre & à la ligne menée du centre C au Soleil. D'où il s'enſuit, en premier lieu, que cette ligne ſera dans le plan de l'Equateur, puiſque l'Equateur renferme toutes les lignes perpendiculaires à l'Axe Pp, que l'on peut mener par le centre C; en ſecond lieu, que cette ligne ſera par la même raiſon dans le plan perpendiculaire à la ligne

menée par le centre C au Soleil ; donc elle ſera la commune ſection de ces deux plans.

139. La ſeconde propoſition de M. *Newton*, eſt que la force que toutes les particules $PapAPepE$ placées hors du globe, exercent pour le faire tourner, eſt à la force d'un nombre égal de parties placées dans le cercle AE de l'Equateur, en forme d'anneau, comme 2 eſt à 5.

La force de toutes les parties $PapAPepE$ (*art.* 10) eſt $\frac{-6Sqk\pi a}{a^3} \times \frac{-4}{3.5}$, & ſi l'on ſuppoſe que $2\pi ab'$ repréſente toutes les parties raſſées dans le plan de l'Equateur, on aura pour la force de toutes ces parties $\frac{-3S\pi akb'}{a^3} \times -\frac{1}{3}$. Or la maſſe ou la ſomme de toutes les particules eſt à très-peu près $= \frac{4\pi.2a}{3}$: car $\frac{4\pi}{3}$ eſt la maſſe de la Sphere, & cette maſſe eſt à celle de la partie extérieure $PapAPepE$, comme 1 à $2a$; donc $b' = \frac{4}{3}$. Mettant cette valeur de b' dans l'expreſſion précedente, on aura $\frac{-6S\pi aqk}{a^3} \times \frac{-2}{3}$. Or cette force eſt à la force $\frac{-6S\pi aqk}{a^3} \times \frac{-4}{3\times 5}$, comme 5 à 2. Donc &c.

140. Par la troiſiéme propoſition de M. *Newton*, le mouvement de la terre autour de ſon centre, eſt au mouvement de l'anneau AE autour d'un de ſes diamé-

tres, en raiſon compoſée de la maſſe de la terre à la maſſe de l'anneau, & de trois fois le quarré d'un quart de circonférence à deux fois le quarré du diamétre.

Pour démontrer cette propoſition, on remarquera que le mouvement de la Sphere $= \int db \int 2\pi b\, dx \times \sqrt{[2bx - xx]} = \frac{\pi^2}{4}$, que le mouvement de l'anneau autour d'un de ſes diamétres, eſt $\int 2\alpha\alpha b' dx = 4\alpha b'$, que la matiére de la Sphere eſt à celle de l'anneau, comme $\frac{4}{3}$ à $2\alpha b'$, & qu'enfin le rapport de 3 fois le quarré du quart de la circonférence à 2 fois le quarré du diamétre, eſt $\frac{3\pi^2}{4} : 8$, or $\frac{\pi^2}{4} : 4\alpha b' :: \frac{4}{3} \times \frac{3\pi^2}{4} : 2\alpha b' \times 8$. Donc &c.

141. M. *Newton* fait enſuite cette hypotheſe, que ſi la terre étoit réduite à l'anneau AE, le mouvement des points Equinoctiaux ſeroit le même, ſoit que cet anneau fût ſolide ou fluide.

C'eſt ici où il me ſemble que la Théorie de M. *Newton* commence à n'être plus ſi bien démontrée. Il doit en effet y avoir de la différence entre le mouvement d'un amas de particules ſolides, dont l'union doit altérer néceſſairement leurs mouvemens réciproques, & une ſuite de particules fluides qui ne tiennent point les unes aux autres. Il ne me paroît pas vrai que le mouvement des nœuds de pluſieurs Lunes, ſoit le même que celui d'une ſeule Lune. Car ce mouvement, ainſi

que la variation de l'inclinaiſon, eſt différent ſelon la poſition de chaque Lune, deſorte que ſi les Lunes ſe trouvent toutes pendant un inſtant dans le même plan, elles ceſſeront bientôt après d'y être, & que les nœuds de chacune ſe mouvront ſéparément; au lieu que tous les points d'un anneau ſolide ſont toujours néceſſairement dans le même plan. Il eſt vrai que le ſyſtême des différentes Lunes dont il s'agit, abſtraction faite de leur action mutuelle, formera une courbe à double courbure qui ne ſera pas bien différente d'un plan.

Il eſt vrai auſſi (*art.* 130) que le mouvement moyen des nœuds de toutes ces Lunes, ſera à très-peu près le même; & il eſt vrai encore, comme nous le verrons tout à l'heure, que le mouvement moyen des nœuds de l'anneau, ſera le même que celui d'une Lune qui tourneroit très-proche de la ſurface de la terre dans le même plan que l'anneau, & avec la même viteſſe. Mais il réſulte toujours de la remarque précedente, que l'hypotheſe de M. *Newton* ne paroît point exacte: on va voir pourtant que ce n'eſt pas cette hypotheſe qui produit l'erreur de ſa ſolution, s'il y en a, comme j'ai lieu de le croire.

142. M. *Newton* ajoute, que ſi la Lune tournoit en un jour autour de la terre, le mouvement annuel de ſes nœuds ſeroit au mouvement réel de ces mêmes nœuds, ſçavoir 20° 11′, comme un jour ſeroit au tems de la révolution périodique réelle de la Lune, c'eſt-à-dire comme $23^h\ 56'$ à $27^j\ 7^h$. Cette propoſition eſt

très-vraie (*article* 131), & il ſuit de plus de ce même *art.* 131, qu'au lieu de cette Lune qui ſe meut autour de la terre à la diſtance du rayon, on peut ſubſtituer un anneau ſolide, comme le fait M. *Newton*; car les nœuds de cet anneau ſolide auront par l'*article* cité, le même mouvement que les nœuds de cette Lune, qu'on ſubſtitue ici à la Lune réelle.

143. M. *Newton* ſuppoſe que la raiſon de 230 à 229, ſoit celle des deux Axes de la terre; & il remarque que le mouvement de l'anneau AE autour d'un de ſes diamétres ſeroit au mouvement de la terre, comme $2a \times 8$, eſt à $\frac{3\pi^2}{4}$, ou comme $2ab' \times 8$ à π^2, c'eſt-à-dire comme 4590 à 489813; de-là il conclut que ſi l'anneau communiquoit au globe ſon mouvement, le mouvement qui reſteroit dans l'anneau ſeroit au mouvement qu'il avoit auparavant, dans le même rapport que ces nombres. Or il me paroît que M. *Newton* ſe trompe en cela: car de ce que le mouvement de l'anneau ſeroit au mouvement de la terre, comme $\frac{3\pi^2}{4}$ à $16a$, s'ils faiſoient tous deux leurs révolutions en même tems, il ne paroît pas s'enſuivre que le mouvement qui reſte à l'anneau après qu'il en a communiqué une partie à la terre, doive être dans cette même raiſon avec le mouvement primitif de l'anneau. Pour le prouver, ſoit M la viteſſe d'un point de l'anneau placé à la diſtance de l'Axe $= a = 1$, X la viteſſe reſtante à l'anneau & à la Sphere, on aura

le moment de l'anneau animé par la viteſſe $M - X =$ au moment de la Sphere animée de la viteſſe X. Donc $(M - X) \int 2adx \sqrt{[2ax - xx]}$ ou $(M - X) \times \pi a b' = X \int db \int 2\pi b dx \, (2bx - xx) = 2\pi X \times (\frac{4}{5} - \frac{8}{3 \cdot 5})$; donc X à très-peu près $= \frac{15 M a b'}{8}$: or par la propoſition de M. *Newton*, on auroit $X = \frac{M \cdot 16 a \cdot b'}{\pi^2}$. Donc ces deux valeurs de X ſont entr'elles, comme $\frac{15}{8} : \frac{16}{\pi^2}$; c'eſt-à-dire à cauſe de $\pi^2 =$ à peu près 10, comme 75 eſt à 64 à peu près; ce qui fait une différence de plus de $\frac{1}{6}$.

En mettant pour b' ſa valeur $\frac{4}{3}$ dans l'équation $X = \frac{15 M a b'}{8}$, on auroit $X = \frac{1}{4} \times \frac{360}{365\frac{1}{4}} \times \frac{15}{8} \times a \times \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 360}{4 \cdot 365\frac{1}{4}} \times a \times \frac{5}{2}$.

144. Enfin M. *Newton* multiplie par $\frac{2}{5}$ la quantité trouvée de la préceſſion des Equinoxes, par la raiſon que la matiére du double Ménisque n'eſt pas reſſerrée dans le plan de l'Equateur, ce qui réduit (*article* 139) la force de rotation à $\frac{2}{5}$ de ce qu'elle ſeroit ſans cela; & il trouve par ce moyen que la préceſſion des Equinoxes, en n'ayant égard qu'à l'action du Soleil, eſt de

près de 10″. Il me ſemble qu'il y a encore ici une mépriſe : car quand même on prendroit pour la préceſſion des Equinoxes non corrigée, la quantité $\frac{3\times 360}{4}\times \alpha\times\frac{1}{2}$ que nous venons de trouver ci-deſſus, cette quantité multipliée par $\frac{2}{5}$ ne donneroit pour la préceſſion réelle des Equinoxes, que $\frac{3\cdot 360\cdot\alpha}{4\cdot 365\frac{1}{4}}$ qui ſeroit (*art.* 137) la moitié ſeulement de ce qu'elle doit être. Car nous avons fait voir qu'elle doit être $\frac{3\cdot 360\cdot\alpha}{2\cdot 365\frac{1}{4}}$.

145. J'ai donné dans l'Introduction qui eſt à la tête de cet Ouvrage, une des raiſons pour leſquelles cette ſuppoſition de M. *Newton* paroît fautive ; j'y ai fait voir par l'exemple d'un lévier, que les mouvemens produits par deux forces différentes, mais différemment appliquées à deux corps de maſſes égales & de différente figure, ne ſont pas entr'eux comme ces forces ; mais à cette premiere conſidération, qui étoit la ſeule que je pouvois rendre ſenſible dans l'Introduction déja citée, il s'en joint une autre qui n'eſt pas moins importante ; c'eſt que l'effet de ces forces eſt altéré par le mouvement de rotation de la terre autour de ſon Axe, avec lequel ſe combine le mouvement que les forces tendent à produire. Car ſi on n'a point d'égard au mouvement de rotation, on trouvera comme dans l'*article* précedent $\frac{3\cdot 360\cdot\alpha}{4\cdot 365\frac{1}{4}}$ pour la préceſſion des Equinoxes,

puiſque la force qui anime l'anneau eſt à celle qui anime le double Méniſque, comme 5 à 2, & que les produits des particules à mouvoir, par les quarrés de leurs diſtances à l'Axe de rotation, ſont (*art.* 143) $\frac{4}{3}\pi\alpha$ d'une part, & $\frac{4}{15}\times 2\pi$ de l'autre ; d'où il s'enſuit que les mouvemens produits par ces forces ſeront entr'eux, comme $\frac{5}{\frac{4}{3}\pi\alpha}$ eſt à $\frac{2}{\frac{4}{15}\times 2\pi}$, c'eſt-à-dire comme 1 eſt à α, & la préceſſion des Equinoxes $\frac{3\cdot 360\cdot\alpha}{4\cdot 365\frac{1}{4}}$ ſe trouvera d'environ 11 à 12″ en vertu de l'action ſeule du Soleil. Suivant M. *Newton*, elle eſt d'environ 10″, & nous avons fait voir (*art.* 137) qu'elle eſt à peu près de 23 à 24″, ſi on a égard au mouvement de rotation. Ainſi le réſultat trouvé par M. *Newton* ne paroît point exact, ſur-tout dans la ſuppoſition que l'on ait égard au mouvement de rotation.

146. On voit par ce détail combien il eſt néceſſaire de réſoudre par une méthode très-rigoureuſe un Problême auſſi compliqué que celui-ci. D'ailleurs, en accordant même à M. *Newton* tous les principes Méchaniques dont il ſe ſert, on doit remarquer qu'il emploie deux principes *de fait* qu'on peut lui conteſter ; ſçavoir 1°. que la différence des Axes de la terre ſoit $\frac{1}{230}$, & que la terre ſoit un Sphéroide homogene ; ces deux ſuppoſitions, qui

qui ne ſont que la même, ſemblent contraires aux obſervations faites par l'Acad. R. des Sciences, obſervations que M. *Bradley* paroît avoir adoptées dans la lettre dont j'ai parlé (*art.* 50), & ſuivant leſquelles l'applatiſſement de la terre eſt beaucoup plus conſidérable que $\frac{1}{230}$. 2°. M. *Newton* pour déterminer la préceſſion des Equinoxes, ſuppoſe que la force de la Lune ſur la terre eſt environ quadruple de la force Solaire; or il n'a déduit ce rapport entre les deux forces, que de la hauteur des marées, & je ne crois pas cette méthode aſſez exacte. J'ai trouvé au contraire (*art.* 54) par les obſervations de la préceſſion des Equinoxes & de la nutation, que la force Lunaire n'eſt qu'environ deux fois $\frac{1}{3}$ plus grande que celle du Soleil, d'où il s'enſuit qu'en accordant tout le reſte à M. *Newton*, la préceſſion annuelle ne devroit pas être de 50″, telle qu'il la trouve, mais d'environ 30 ou 35″. Enfin, M. *Newton*, dans la propoſition citée, n'a rien dit ſur la nutation de l'Axe de la terre : or cette nutation, comme nous l'avons vû, doit altérer ſenſiblement la préceſſion des Equinoxes. Je crois auſſi qu'il auroit dû faire voir pourquoi l'action du Soleil & de la Lune changent ſi peu l'inclinaiſon de l'Axe de la terre ſur l'Ecliptique, quoiqu'elles tendent à faire tourner la terre autour d'un Axe placé dans l'Equateur. C'eſt ce que j'ai expliqué fort clairement, ſi je ne me trompe, dans l'*art.* 126. Cette condition étoit, ce me

ſemble, d'autant plus néceſſaire pour mettre la ſolution de M. *Newton* à l'abri de toute atteinte, que dans la diſtribution de mouvement que ce grand Geométre imagine ſe faire entre l'anneau circulaire, & le globe, il paroît ſuppoſer, comme nous l'avons déja remarqué, que l'anneau tourne ou tend à tourner autour d'un de ſes diamétres, & par conſéquent autour d'un des diamétres de l'Equateur; d'où il s'enſuivroit que la rotation qu'il communique au globe devroit auſſi ſe faire autour d'un des diamétres de l'Equateur, & qu'ainſi le Pôle de la terre ſeroit bien éloigné de ſe mouvoir à peu près parallélement au plan de l'Ecliptique, ce qui ſeroit très-contraire aux obſervations.

En voilà, ce me ſemble aſſez, pour faire voir que cette importante matiére avoit peut-être beſoin d'être traitée plus à fond qu'elle ne l'a été par ce grand Geométre, & que le Problême que j'ai réſolu dans cet Ouvrage eſt du moins à pluſieurs égards entiérement nouveau.

CHAPITRE XV.

Réflexions ſur les différens mouvemens apparens, ou réels, que l'on peut obſerver dans l'Axe de la terre.

147. JE n'ai traité dans cet Ouvrage que des mouvemens les plus ſenſibles de l'Axe terreſtre, & les ſeuls qu'on puiſſe regarder comme connus aujourd'hui

des Aſtronomes ; ſçavoir la préceſſion moyenne & annuelle des Equinoxes, l'équation de cette préceſſion, & la nutation de l'Axe de la terre qui eſt à peu près de 18 ſecondes en 19 ans : j'ai prouvé, de plus, que ces mouvemens s'accordent, autant qu'on le peut deſirer, avec le ſyſtême de l'Attraction. Car quoique je faſſe décrire au Pôle de la terre une petite Ellipſe au lieu d'un cercle que lui fait décrire M. *Bradley*, la différence que ces deux ſuppoſitions produiſent dans les calculs, ne va qu'à un très-petit nombre de ſecondes. Or quand on voudroit s'en tenir abſolument aux obſervations de M. *Bradley*, & ne les pas ſoupçonner de la moindre erreur, on pourroit encore attribuer la différence entre ma Théorie & les obſervations, à quelques autres petites équations négligées dans le mouvement de l'Axe de la terre.

On a vu dans le calcul des deux formules Y & Z de l'*article* 45, que je n'ai point eu d'égard à pluſieurs termes qui renferment quelques petites équations, parce que la plus conſidérable doit aller à moins d'une ſeconde. En effet, il a été prouvé dans l'*article* 52, que les coefficiens $\frac{3A}{2K}$ & $\frac{3A(1+6)m'}{2K}$ doivent être entr'eux après l'intégration, comme 1 à 6, & davantage ; ainſi puiſque le ſecond de ces coefficiens ne donne une équation que de $9''$, il s'enſuit que le premier donneroit à peine une équation d'une ſeconde. Mais cette équation diminuera encore, ſi l'on conſidére que le premier coefficient eſt multiplié par Coſ. π^2, & le ſecond par

Sin. π. Cof. π qui eſt beaucoup plus grand. De même dans l'équation Z, on trouvera que le facteur $1 - 2 \times$ Cof. $\pi^2 =$ (*art.* 60) $\frac{62}{100}$; or cette fraction eſt plus grande que Sin. $\pi \times$ Cof. π, qui n'eſt égal qu'à $\frac{36}{100}$. Donc &c.

Ces obſervations font voir combien nous avons été en droit d'omettre dans les formules du mouvement de l'Axe terreſtre, les termes que nous avons traités comme nuls dans les équations Y, Z; dans cette même équation Z, nous avons dû négliger le terme $dd\pi$, parce que ce terme eſt à celui qui contient $1 - 2$ Cof. ϖ^2 dans l'équation différentielle, comme Sin. $\varpi \times \frac{n' - M}{365\frac{1}{4}}$ eſt à $1 - 2$ Cof. ϖ^2, c'eſt-à-dire, comme 1 eſt à $12 \times 365\frac{1}{4}$ à très-peu près; ainſi l'on voit que le terme $dd\pi$ eſt encore beaucoup plus petit que nous l'avons ſuppoſé dans l'*article* 52. Je crois donc que toutes les quantités négligées dans les formules de l'*art.* 52, ne ſont d'aucune conſidération, parce qu'elles n'altérent point ſenſiblement la nutation de l'Axe de la terre.

148. Un plus grand nombre d'obſervations nous apprendra, s'il y a en effet quelque autre mouvement dans cet Axe, dont on doive tenir compte, & il ſera poſſible avec un peu de patience & de calcul, de s'aſſurer ſi le ſyſtême de l'Attraction eſt favorable ou non à ces divers mouvemens. Il ne faudra pour cela que réſoudre plus exactement les formules Y, Z, ou, ce qui revient

au même, en trouver l'intégrale plus approchée ; or l'on a des méthodes pour approcher autant qu'on veut de l'intégrale d'une équation dont on connoît déja l'intégrale à peu près.

149. L'inégalité qu'on obſerve dans les diſtances de la Lune à la terre, ainſi que dans les mouvemens de cette Planete, eſt une des circonſtances auxquelles il ſera le plus néceſſaire d'avoir égard dans le calcul. Nous avons ſuppoſé que cette Planete ſe meuve dans un cercle parfait autour de la terre avec une viteſſe uniforme, & nous avons fait la même ſuppoſition par rapport au mouvement de la terre autour du Soleil : or perſonne n'ignore que la terre parcourt une Ellipſe dont le Soleil eſt le foyer, & dont les apſides ont un mouvement très-lent, & que la Lune décrit auſſi autour de la terre une orbite à peu près Elliptique, dont les apſides font leur révolution en 9 ans ; je dis à peu près Elliptique, à cauſe de différentes inégalités qui altérent le mouvement de la Lune dans cette orbite, & dont je traiterai ailleurs plus en détail. De-là il s'enſuit, que ſi on nomme B la diſtance moyenne de la Terre au Soleil, & ζ l'Arc qu'elle parcourt réellement durant le tems qu'elle décriroit l'Arc z par ſon mouvement moyen, on aura u ou la diſtance variable de la Terre au Soleil, égale à $B + E$ Cof. $K\zeta + G$ Sin. $K\zeta$, E, G, étant des quantités conſtantes qui dépendent de l'excentricité de l'orbite terreſtre, & de la poſition de l'aphelie, lorſque $\zeta = 0$, & K une quantité très-peu différente de l'unité,

dont la valeur dépend du mouvement des apſides de l'orbite terreſtre. De plus, on a $z = \zeta + Q$ Sin. $K\zeta +$ R Cof. $K\zeta$, Q, & R étant auſſi des conſtantes qui dépendent de l'excentricité & de la poſition de l'aphelie: c'eſt pourquoi ſuppoſant comme dans l'*art.* 43, $dt = \frac{Bdz}{g}$ & $dt^2 = \frac{B^2 dz^2}{g^2}$, ou $\frac{dz^2}{S} \times B^2$, & conſervant auſſi l'Arc Mz, qui marque la préceſſion annuelle des Equinoxes, on mettra au lieu de z la quantité ζ, ou $z - Q \times$ Sin. $Kz - R$ Cof. Kz, &c. de même au lieu de $\frac{1}{u^3}$, on mettra $\frac{1}{B^3} \times (1 - \frac{3E}{B}$ Cof. $Kz - \frac{3G}{B}$ Sin. Kz, &c.); on aura pareillement 1°. la valeur de $\frac{1}{u'^3}$, u' étant la diſtance de la Lune à la Terre, 2°. celle de l'Arc ζ' que la Lune parcourt durant le tems que la terre décrit l'Arc ζ. Car on trouvera $= B' + E'$ Cof. $K'\zeta' + G' \times$ $K'\zeta'$, B' étant la diſtance moyenne de la Lune à la Terre, K' une quantité qui marque le mouvement des apſides, & E', G' des quantités qui dépendent de l'excentricité & de la poſition de l'aphelie. On trouvera de même $nz = \zeta' + Q'$ Sin. $K'\zeta' + R$ Cof. $K'\zeta'$, &c. On mettra donc dans les formules Y & Z, à la place de $\frac{1}{u'^3}$ ſa valeur $\frac{1}{B'^3} \times (1 - \frac{3E'}{B}$ Cof. $K'nz - \frac{3G'}{B} \times$ Sin. $K'nz$, &c.), & à la place de nz, la quantité $nz -$ Q Sin. $K'nz - R$ Cof. $K'nz$, &c; & après avoir in-

tégré l'équation, on pourra, ſi l'on veut, mettre à la place de z & de nz leurs valeurs trouvées ci-deſſus en ζ & en ζ', afin que les formules de la préceſſion des Equinoxes & de la nutation renferment les vrais angles ζ & ζ' que le Soleil & la Lune décrivent dans un tems donné, & qu'elles deviennent par-là plus faciles à calculer pour les uſages Aſtronomiques. Toutes ces corrections & approximations, qui demandent des calculs aſſez longs & aſſez pénibles, ne produiroient, autant que j'en puis juger, que des équations très-petites & peut-être abſolument inſenſibles.

La raiſon qui me porte à le croire, c'eſt que je vois que les mouvemens de l'Axe de la terre découverts par M. *Bradley* s'accordent très-bien avec ce que nous avons trouvé, en réſolvant nos formules par approximation. Mais j'eſpere dans la ſuite examiner ce point plus à fond, & m'aſſurer ſi en effet l'Axe de la terre ne doit point être ſujet à quelque autre mouvement ſenſible. Les calculs que cette recherche me donnera lieu de faire, comparés avec les obſervations que feront les Aſtronomes, nous fourniront de nouvelles lumieres ſur le ſyſtême Newtonien. L'Ouvrage que je donne aujourd'hui eſt une eſpéce d'engagement que je prends à cet égard, & que je tâcherai de remplir le mieux qu'il me ſera poſſible.

150. De tous les mouvemens que l'Axe de la terre peut avoir, celui qu'il importe le plus de découvrir, mais ſur lequel les Aſtronomes ne ſeront pas en état

de prononcer ſi-tôt, c'eſt la diminution prétendue de l'obliquité de l'Ecliptique. Selon M. *le Chevalier de Louville*, cette obliquité diminue d'environ une minute en 100 ans, c'eſt-à-dire que l'angle de l'Axe de la terre avec l'Ecliptique devient plus grand de 1′ à la fin de chaque ſiécle. Mais il s'en faut beaucoup que cette opinion de M. *le Chevalier de Louville* puiſſe être regardée comme démontrée : il ſuffit, pour s'en convaincre, de lire les Réflexions de M. *le Monnier* ſur ce ſujet, dans la Préface de ſes *Inſtitutions Aſtronomiques*.

151. Je n'ai point cru devoir chercher par le moyen de mes formules, ſi cette diminution de l'obliquité de l'Ecliptique doit en effet avoir lieu. Outre que cette recherche demande de longs calculs, & par conſéquent beaucoup de tems, elle ſeroit d'ailleurs inſuffiſante pour décider la queſtion. Car quand on s'aſſureroit par la réſolution des équations Y & Z, que l'action du Soleil & de la Lune ne doit produire que des mouvemens de nutation ou de balancement dans l'Axe de la terre, ce qui ſuppoſe une Analyſe très-délicate & très-compliquée, on n'en pourroit pas conclure pour cela, que l'action des autres Planetes ſur la terre ne dût pas produire dans l'Axe de notre globe un mouvement par lequel le Pôle de la terre s'éloignât inſenſiblement de l'Ecliptique, ou un mouvement dans l'Ecliptique même, par lequel elle s'éloignât du Pôle de la terre. Or la ſolution de ce Problême n'eſt point du reſſort de cet Ouvrage ; je pourrai expoſer ailleurs les moyens par leſ-

quels

quels je crois qu'on doit y parvenir. Il eſt néceſſaire encore de s'aſſurer, comme le remarque M. *Bradley*, ſi la Sphere des Etoiles & notre ſyſtême Solaire ſont dans un repos parfait, & ſi quelques Etoiles ne ſont pas ſujettes à des mouvemens particuliers ; afin de ne pas confondre ces mouvemens, s'ils exiſtent, avec les mouvemens réels de l'Axe de la terre. Or des recherches ſi pénibles & ſi ſubtiles ne peuvent être que l'ouvrage du tems : il doit, ce me ſemble, nous ſuffire pour le préſent d'avoir bien prouvé dans ces Recherches, que le ſyſtême de l'Attraction s'accorde avec les Phenomenes que nous avons entrepris d'expliquer, & qui ſont les ſeuls bien conſtatés ; & qu'ainſi la Théorie du mouvement de l'Axe de la terre, paroît au moins juſqu'à préſent, très-favorable à ce ſyſtême.

Je me contenterai donc d'examiner en peu de mots dans le Chapitre ſuivant, le petit changement que l'action de la Lune peut cauſer dans la ſituation de l'Ecliptique, parce que ce petit changement, s'il eſt ſenſible, doit produire des variations apparentes dans la déclinaiſon & dans l'aſcenſion droite du Soleil, & par conſéquent dans ſes différences en aſcenſion droite & en déclinaiſon avec les Etoiles fixes. Une telle recherche n'eſt point étrangere à l'objet de ce Traité, puiſque l'action de la Lune changeant à chaque inſtant la poſition du plan de l'Ecliptique, change auſſi la poſition de l'Axe de la terre par rapport à ce plan.

CHAPITRE XVI.

De la variation du Soleil en latitude, causée par l'action de la Lune sur la terre.

152. COMME la Lune ne se meut pas exactement dans le plan de l'Ecliptique, il est évident que l'action de cette Planete sur la terre doit tantôt élever, tantôt abbaisser la terre par rapport à ce plan, & que par conséquent l'orbite terrestre, ou, ce qui revient au même, l'orbite apparente du Soleil, n'est pas rigoureusement plane, de maniére que le Soleil peut avoir quelque variation apparente plus ou moins sensible en latitude, en s'approchant & s'éloignant alternativement de certaines Etoiles, surtout de celles qui sont situées vers les cercles Polaires. C'est la quantité & les loix de cette variation que nous allons déterminer.

153. Nous supposerons dans le calcul suivant, que la Lune & la Terre décrivent des cercles dont les rayons soient B' & B, ou B' & 1, en prenant B pour l'unité, que S soit la masse du Soleil, λ celle de la Lune, z l'arc ou l'angle que la Terre décrit dans un tems quelconque t, au commencement duquel on suppose que la Lune a passé par son nœud ascendant, g la viteſſe apparente du Soleil. Donc $dt = \frac{Bdz}{g}$ & $dt^2 = \frac{B^2dz^2}{g^2}$. Or l'action du Soleil à la distance B' étant $\frac{S}{B'^2}$, on aura

$g^1 = \frac{S}{B^2} \times B = \frac{S}{B}$; de plus, l'angle que décrit la Lune durant le tems t ſera nz : & ſi on ſuppoſe, comme dans les Chapitres précedens, que les nœuds de l'orbite Lunaire ſe meuvent d'un mouvement rétrograde avec une viteſſe angulaire qui ſoit à celle de la Terre, comme n' à 1, on aura l'Arc parcouru durant le tems t par la ligne des nœuds $= n'z$: donc la diſtance de la Lune au nœud ſera $nz + n'z$.

Soit à préſent la Terre en t (Fig. 62) au commencement du tems t, lorſque la Lune a paſſé par ſon nœud aſcendant. Il eſt certain que cette Planete décriroit l'orbite circulaire plane tt' autour du Soleil, ſi la Lune demeuroit dans le plan de l'Ecliptique ; mais comme la Lune en s'élevant au-deſſus de ce plan oblige la Terre de s'en écarter, ſoit ſuppoſée la Terre en T, & la Lune en L ; & ayant mené parallélement au plan tSt', la ligne NTn, qui repréſente la poſition de la ligne des nœuds pour cet inſtant, on abbaiſſera la perpendiculaire Tt' au plan tSt', & la perpendiculaire Ll au plan nTl parallele à tSt ; & il eſt évident que la force qui tire la Terre T ſuivant Tt', eſt $\frac{S}{B^2} \times \frac{Tt}{B} - \frac{\lambda}{B'^2} \times \frac{Ll}{TL}$: faiſant donc $Tt' = x$, & conſidérant que Ll eſt au Sinus de l'angle nTl, dans la raiſon de la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite Lunaire au Sinus total, c'eſt-à-dire dans la raiſon de m' à 1, on aura $\frac{Ll}{Tl} = (\text{Sin. } nz + n'z) \times$

m', & par conſéquent la force accélératrice qui agit ſur le point T ſuivant Tt', ſera $\frac{Sx}{B^3} - \frac{\lambda m}{B'^2} \times (\text{Sin. } nz + n'z)$. Or comme cette force agit ſuivant Tt' (*hyp.*), & tend à diminuer la viteſſe du point T ſuivant Tt', on aura $-ddx = (\frac{Sx}{B^3} - \frac{\lambda m'}{B'^2} \times [\text{Sin. } nz + n'z])\, dt^2$, ou (mettant pour dt^2 ſa valeur $\frac{B^3 dz^2}{g^2} = \frac{B^3 dz^2}{S}$, & ſuppoſant $n + n' = p$) $ddx + xdz^2 - \frac{\lambda m' B^3 dz^2}{S \cdot B'^2} \text{ Sin. } pz = 0$; faiſant donc $\frac{-\lambda m B^3 dz^2 \text{ Sin. } pz}{S \cdot B'^2} = Mdz^2$, & conſidérant que x & $\frac{dx}{dz}$ ſont $= 0$, lorſque $z = 0$, on aura $x = -\frac{e^{-zV-1} \int MV-1\, dz\, e^{zV-1}}{2} + \frac{e^{zV-1} \int M dz V-1\, e^{-zV-1}}{2}$: donc mettant pour M ſa valeur exprimée par des exponentielles imaginaires, il viendra $\frac{x}{B} = -\frac{\lambda m' B^2}{2SB'^2} \times (\frac{2 \text{ Sin. } pz}{pp-1} + \frac{2p \text{ Sin. } z}{1-pp})$. Le ſecond membre de cette équation eſt donc la valeur du Sinus, ou de la tangente de l'angle TSt'. Or la force attractive de la Terre ſur la Lune étant $\frac{T}{B'^2}$, on a $\frac{T}{B'^2} : \frac{S}{B^2} :: B' \cdot \frac{B}{n^2}$, & par conſéquent ſi on ſuppoſe $\lambda = \frac{T}{q}$, on trouvera $\frac{x}{B} = \frac{-B'm'n^2}{2Bq} \times$

$(\frac{2 \text{ Sin. } pz}{pp-1} + \frac{2p \text{ Sin. } z}{1-pp})$: mais p^2 eſt à peu près $= n^2$, à cauſe que n' eſt fort petit par rapport à n ; ainſi la plus grande valeur de $\frac{x}{B}$ ſera à peu près $\frac{B'm'}{qB} \times (p+1)$ Sin. tot. Or $m' = \frac{\text{tang. } 5 \text{ degrés}}{\text{Sin. tot.}}$; $p+1 =$ à peu près 15, parce que $n = 13\frac{1}{2}$: à l'égard des quantités B', B elles ſont entr'elles en raiſon inverſe des parallaxes de la Lune & du Soleil ; or ſuivant les Aſtronomes, la parallaxe de la Lune eſt d'environ $57'$, & M. *le Monnier* dans ſes *Inſtitutions Aſtronomiques*, fait la parallaxe du Soleil de $15''$. Donc $\frac{B'}{B} = \frac{15''}{57'}$: enfin $\frac{1}{q} = \frac{1}{80}$ ſuivant le calcul de l'*article* 57 : donc on aura ſuivant ces différentes hypotheſes $\frac{x}{B} = \frac{15''}{57' \cdot 60''} \times \frac{15}{80} \times \text{tang. } 5° =$ environ $\frac{1'}{4}$. Or comme cette quantité eſt tantôt affirmative, & tantôt négative, il s'enſuit que la variation apparente du Soleil en latitude devroit être d'environ $\frac{1'}{2}$, ſçavoir d'environ $\frac{1'}{4}$ vers le Midi, trois mois après que la Lune a paſſé par ſon nœud aſcendant, & d'environ $\frac{1'}{4}$ vers le Nord, neuf mois après que la Lune a paſſé par ce nœud. Il peut y avoir encore dans la valeur de x quelques équations à calculer. Car ceci n'eſt qu'un *eſſai*.

REMARQUE I.

154. Au reſte, ce changement doit ſuivre aſſez exactement la période que nous venons de marquer. Mais ſa quantité déterminée par la Théorie n'eſt pas auſſi ſûre, parce que la parallaxe du Soleil n'eſt pas encore ſuffiſamment connue. Nous avons ſuppoſé avec les plus célébres Aſtronomes, cette parallaxe égale à 15″; ſi les obſervations ou l'expérience nous faiſoient connoître dans la ſuite que cette quantité dût être diminuée ou augmentée, il faudroit diminuer ou augmenter en même raiſon la variation du Soleil en latitude. Je crois même que ſi les Aſtronomes ne remarquent point de variation ſenſible dans la latitude du Soleil, c'eſt une marque que cet Aſtre a une parallaxe beaucoup plus petite que 15 ſecondes; car de tous les Elémens qui entrent dans la formule de la variation du Soleil en latitude, le plus incertain eſt celui de la parallaxe du Soleil, la maſſe de la Lune ayant été déterminée aſſez exactement dans le Chapitre cinquiéme.

REMARQUE II.

155. Comme c'eſt par les obſervations de la déclinaiſon du Soleil, qu'on peut découvrir plus facilement ſi cet Aſtre a une variation ſenſible en latitude, nous allons donner ici l'équation entre la variation de la latitude, celle de la déclinaiſon, & celle de l'aſcenſion droite.

Soit (Fig. 63) ΥE l'Equateur, ΥS, l'Ecliptique, Ss un Arc très-petit, perpendiculaire à l'Ecliptique, & qui marque la variation apparente en latitude, P le Pôle, SQ, Ee, les variations en déclinaiſon & en aſcenſion droite qui correſpondent à la variation en latitude; ſoit $Ss = \alpha$, on aura $SQ = Ss \times$ Sin. $ES\Upsilon$, & $Ee = \frac{sQ}{\text{Sin. décl.}} = \frac{Ss \times \text{Cof. } ES\Upsilon}{\text{Sin. décl.}}$: or ſoit k le Sinus de l'angle $S\Upsilon E$, ou, ce qui eſt la même choſe, le Coſinus de l'angle ϖ que fait l'Axe de la terre avec l'Ecliptique; on aura $\frac{\text{Sin. } SE}{\text{Sin. } \Upsilon S} = \text{Cof. } \varpi$ ou k; d'où il s'enſuit, que Cof. $\varpi = \frac{SL \times \text{Cof. décl.}}{SO \text{ Coſin. longit.}}$: donc $\frac{SL}{SO}$, c'eſt-à-dire le Cof. de $ES\Upsilon = \frac{\text{Cof. } \varpi \times \text{Cof. longit.}}{\text{Cof. décl.}}$. Connoiſſant le Coſinus de $ES\Upsilon$, on connoîtra facilement cet angle & ſon Sinus, & on remarquera que ce Sinus doit toujours être pris poſitivement, parce que l'angle ΥSE n'eſt jamais de 180 degrés. Ainſi on fera les deux Analogies ſuivantes.

Premiere analogie: comme le Sinus total eſt au Sinus de $ES\Upsilon$, ainſi la variation en latitude eſt à un quatriéme terme qu'il faudra ajouter à la déclinaiſon, ou en ſouſtraire, ſi la déclinaiſon eſt Méridionale.

Seconde analogie: comme le Sinus de la déclinaiſon eſt au Coſinus de $ES\Upsilon$, ainſi la variation en latitude

eſt à un quatriéme terme qu'il faudra ſouſtraire de l'aſcenſion droite.

Je ſuppoſe dans cette Figure 63, que la variation de latitude eſt Septentrionale : ſi elle étoit Méridionale, il faudroit la traiter comme une quantité négative.

FIN.

FAUTES A CORRIGER.

Page 23, *lig.* 17, au lieu de Z, *liſez* Z'

Pag. 25, *lig.* 3 & 15, au lieu de Ψ', *liſ.* Ψ

Pag. 31, *lig.* 15, au lieu de parallélement, *liſ.* perpendiculairement

Pag. 37, *lig.* 16, au lieu de Ce'', *liſ.* Ce''

Pag. 60, *lig.* 2 de la note, au lieu de π, *liſ.* l'équation de π

Pag. 62, *ligne derniere*, au lieu de, ce rapport, *liſ.* le rapport de 1 à $1+\epsilon$

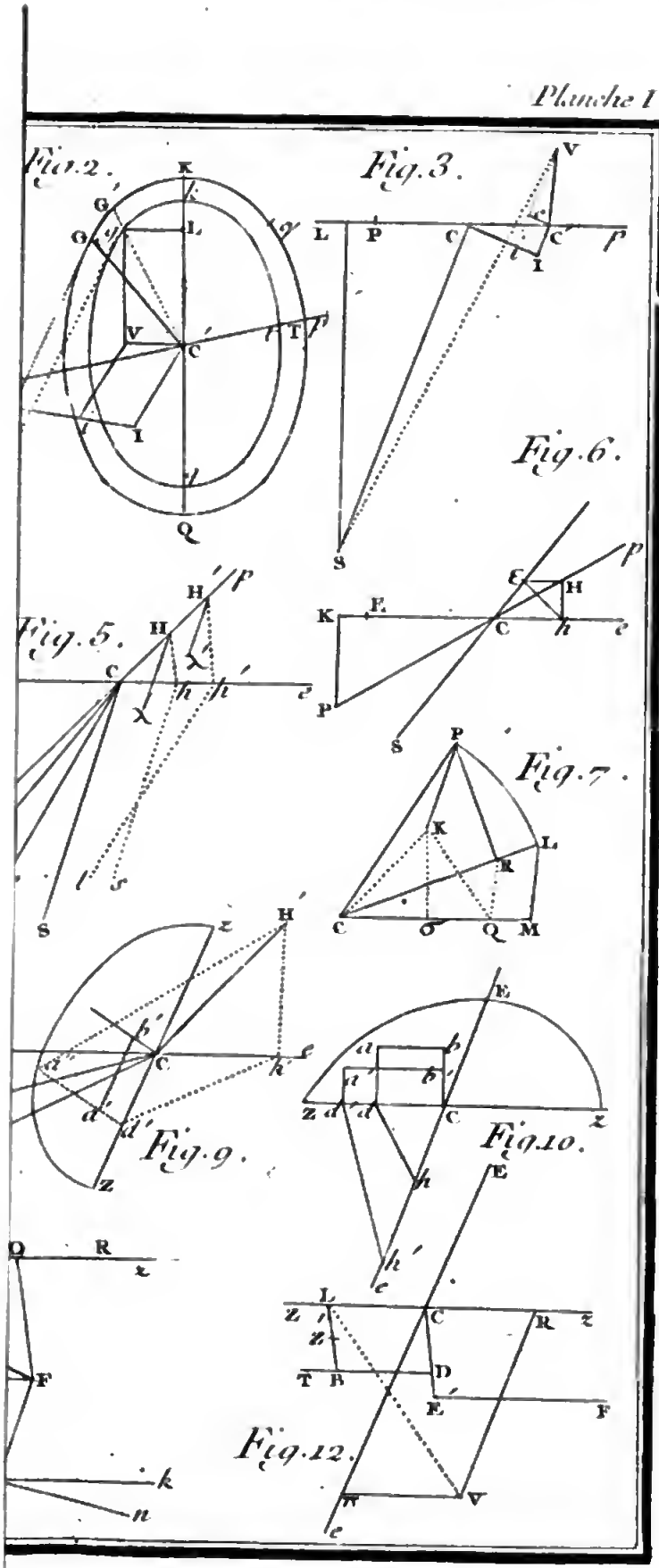
Pag. 69, *lig.* 9, au lieu de *te*, *liſ. the*

Pag. 104, *ligne derniere*, au lieu de [:] *liſ.*]:[

Pag. 112, *lig.* 18, effacez $\times$ Coſ. $n'z - Mz$.

DE L'IMPRIMERIE DE JEAN-BAPTISTE COIGNARD,
IMPRIMEUR DU ROI.

5.3.2.14
5



Digitized by Google

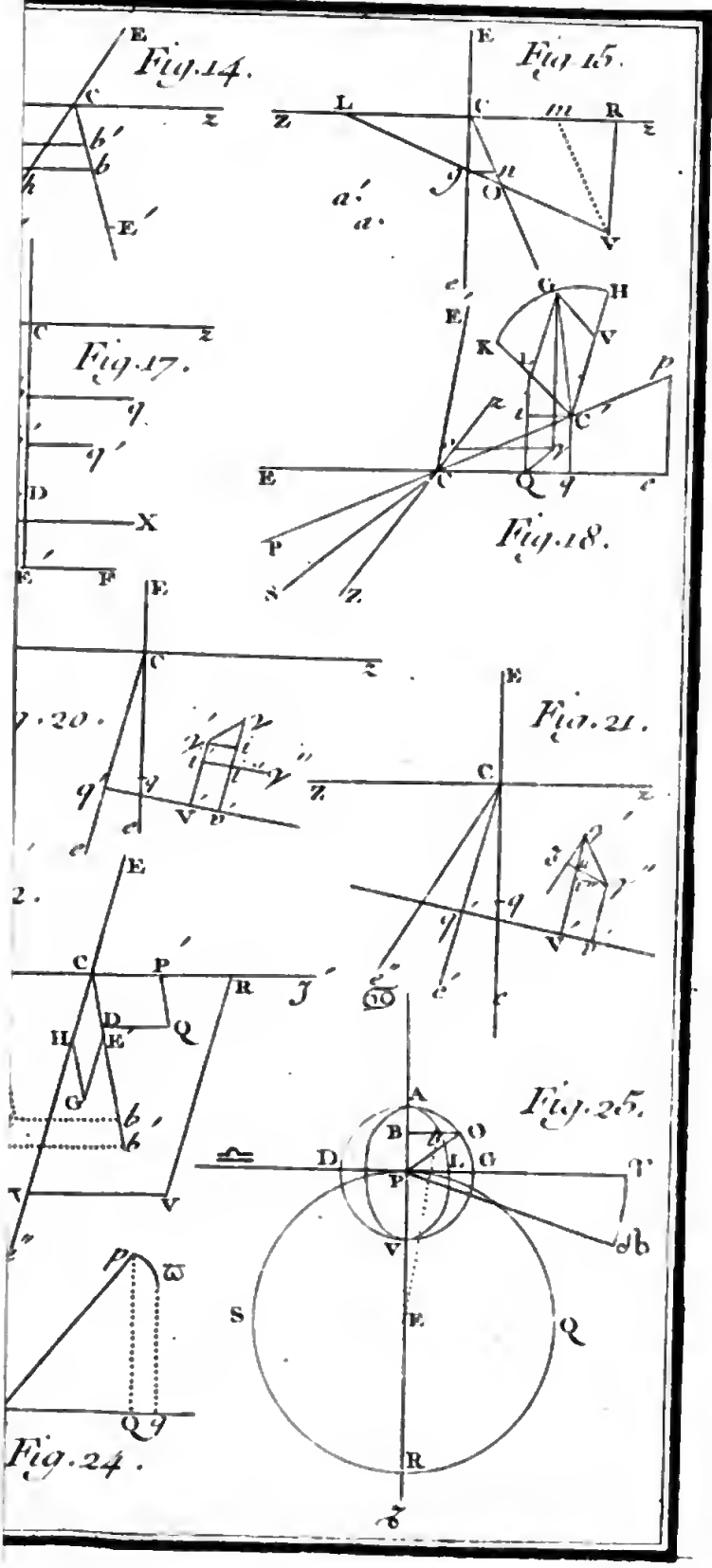


Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 21.
Fig. 24.
Fig. 25.

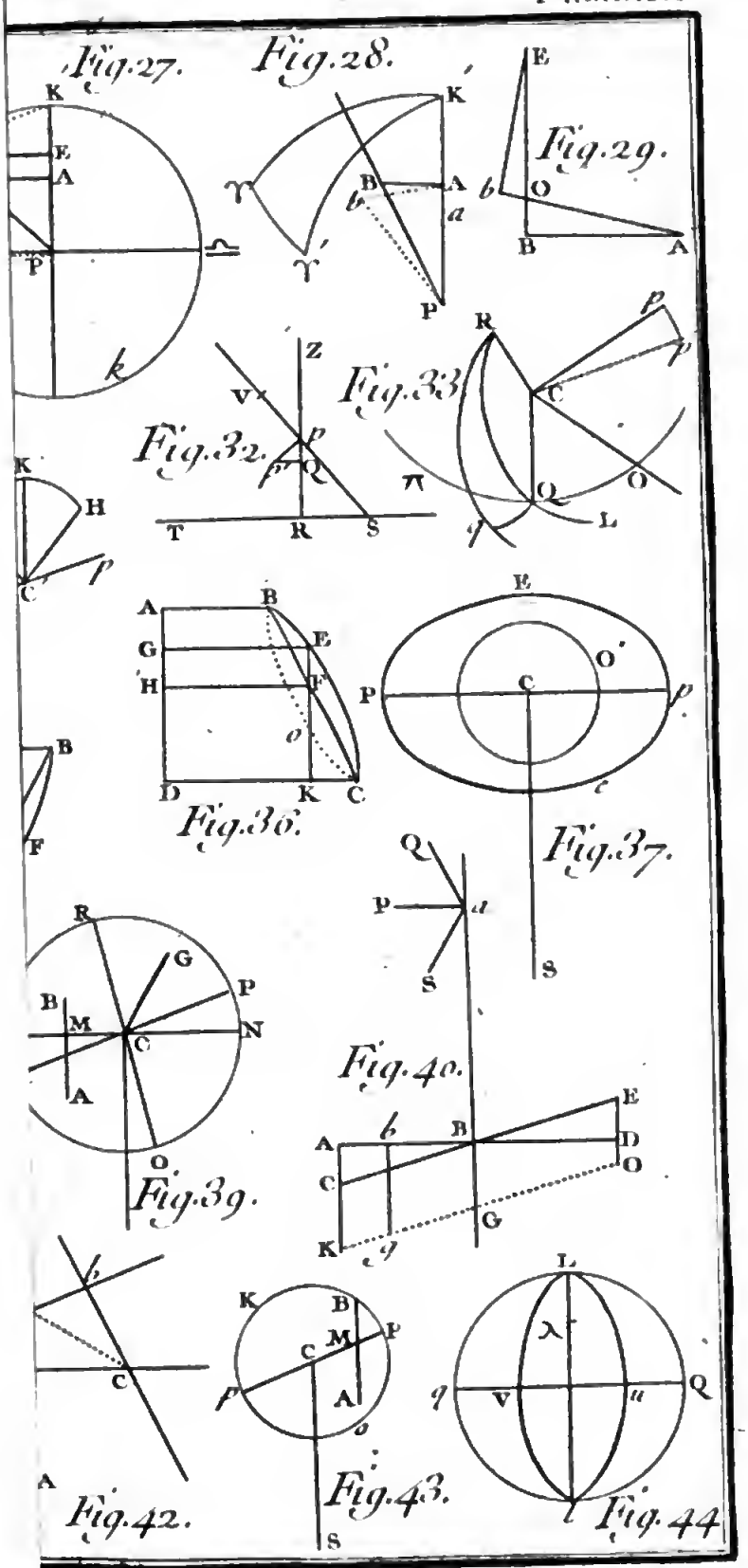


Fig. 27.
K
E
A
P
k
Fig. 28.
K
γ
B
A
b
a
P
γ'
E
Fig. 29.
b
O
B
A
Z
V
Fig. 32.
p
Q
T
R
S
R
Fig. 33
p
C
Q
O
π
L
K
H
C
p
A
B
G
E
H
F
o
D
K
C
Fig. 36.
B
F
E
O'
P
C
p
c
Fig. 37.
Q
P
a
S
S
R
G
P
B
M
C
N
A
O
Fig. 39.
Fig. 40.
E
A
b
B
D
C
O
K
G
c
g
b
C
A
Fig. 42.
K
B
M
P
C
F
A
o
S
Fig. 43.
L
λ
q
V
u
Q
l
Fig. 44

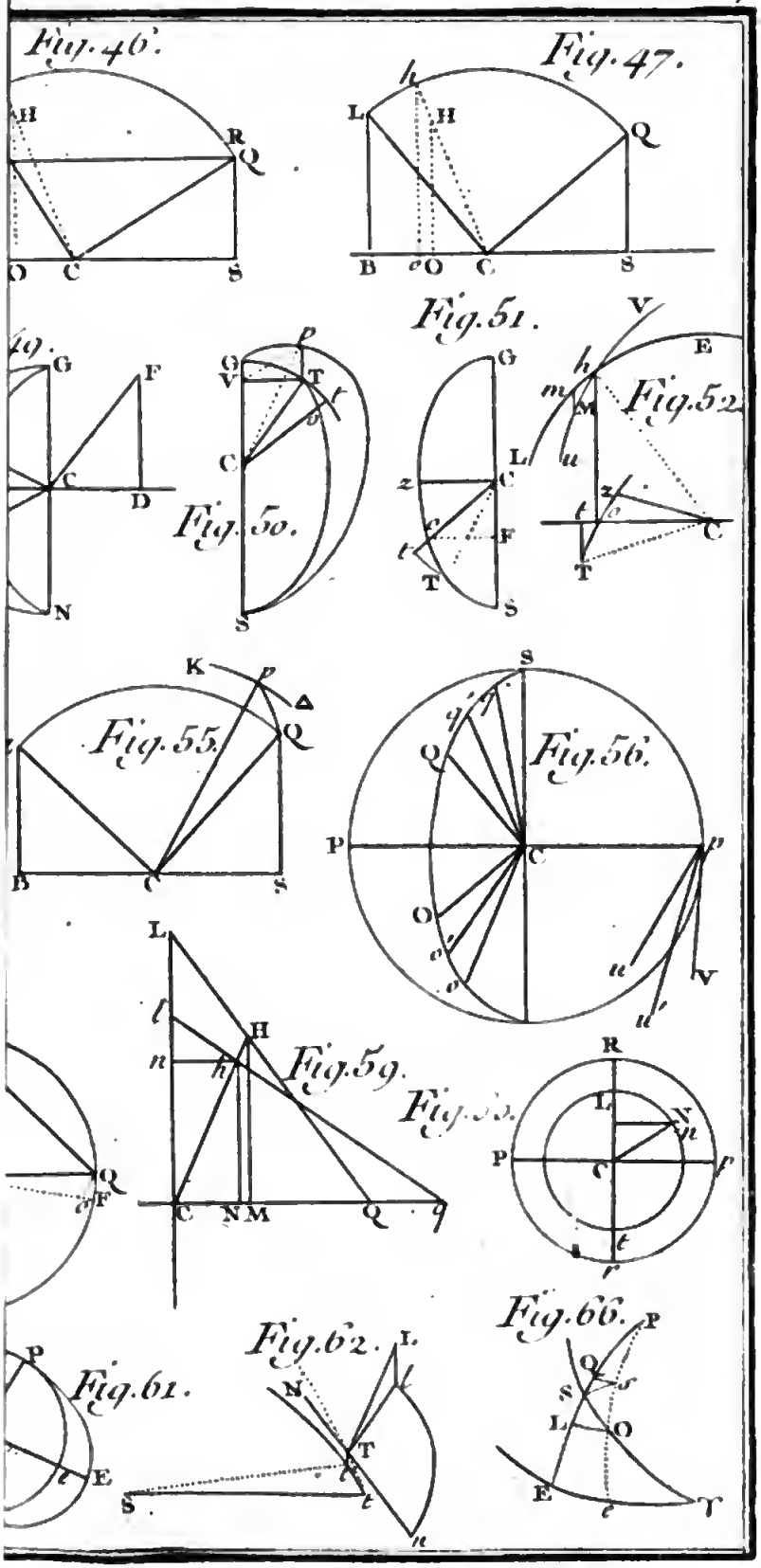
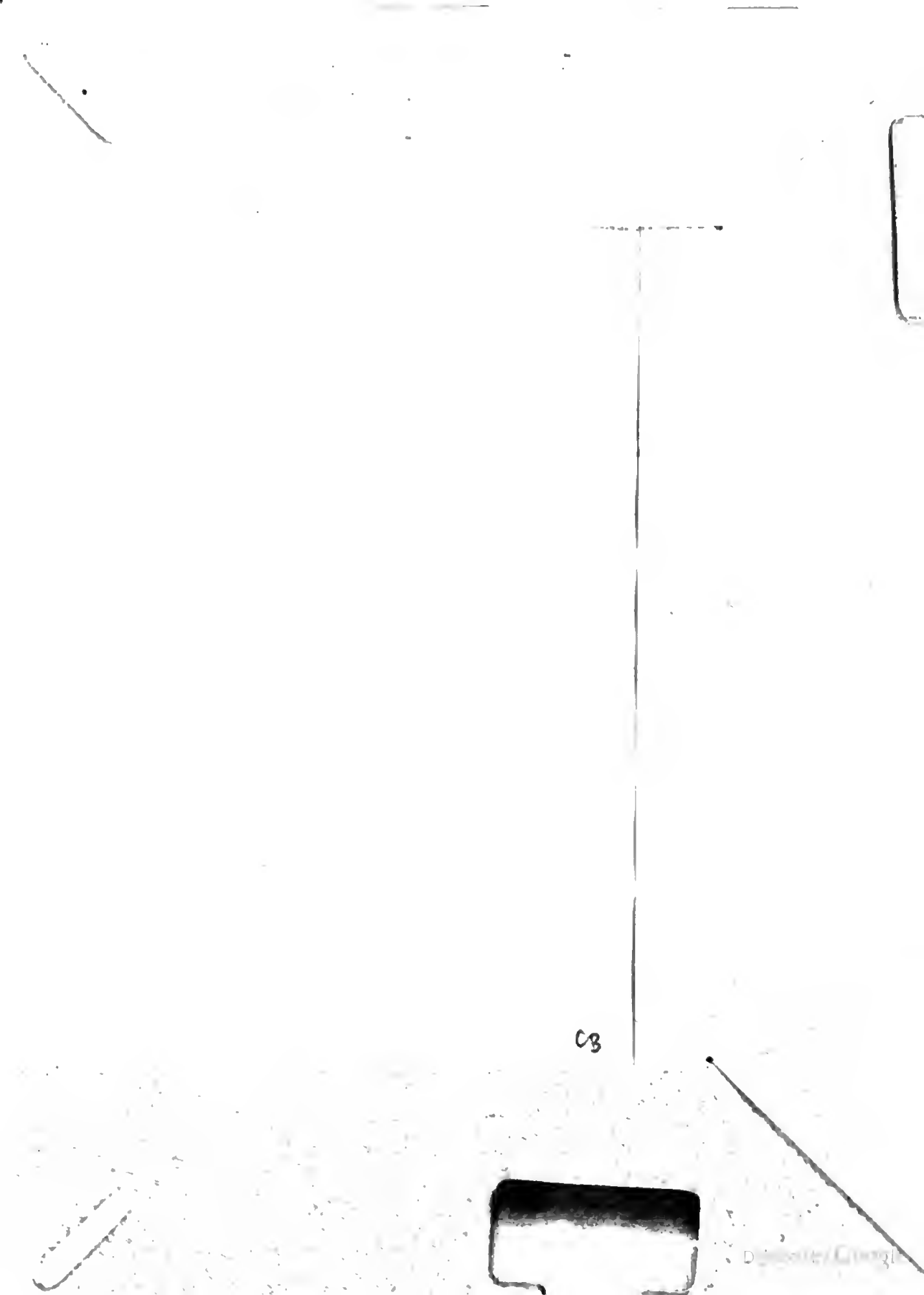


Fig. 46.
H
R
Q
O
C
S
Fig. 47.
h
L
H
Q
B
O
C
S
Fig. 51.
G
F
C
D
N
Fig. 50.
p
G
V
T
r
C
S
G
L
z
C
e
F
t
T
S
V
E
h
m
M
u
Fig. 52.
L
z
t
C
T
K
p
Δ
Q
Fig. 55.
B
C
S
S
Fig. 56.
q
Q
P
C
p
O
o
u
V
d
L
l
H
n
h
Fig. 59.
C
N
M
Q
q
Q
F
R
L
Fig. 58.
P
C
f
t
P
P
Fig. 61.
E
S
Fig. 62.
L
N
T
t
n
Fig. 66.
P
Q
S
s
L
O
E
T